

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0, b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b . Si illustri come varia G_b al variare di b .
2. Sia P un punto di G_b : La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B . Si dimostri che, qualsiasi sia P , il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O e tangente a G_e ($e =$ numero di Nepero). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y , da G_e e dalla retta di equazione $y = e$.

Soluzione

1. La funzione esponenziale $f(x) = b^x$, con $b > 0$ e $b \neq 1$, assume valori positivi per ogni x reale, ha come codominio $]0; +\infty[$, è strettamente crescente per $b > 1$ e strettamente decrescente per $0 < b < 1$, ancora, ammette l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale. La derivata prima della funzione esiste per ogni punto del dominio e non si annulla in alcun punto. In Figura 1 è riportato il diagramma del grafico per $b > 1$, in Figura 2 quello relativo al caso $0 < b < 1$.

Figura 1

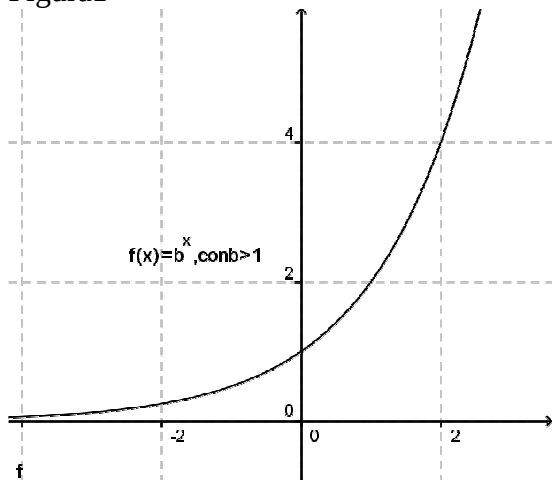
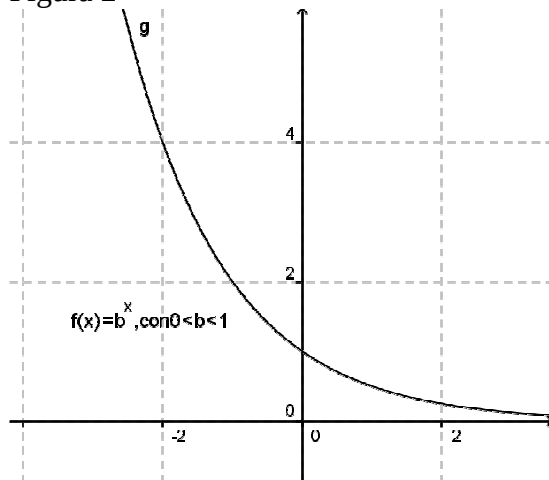


Figura 2



2. Sia $P(x_0; b^{x_0})$ il generico punto del diagramma della funzione; dobbiamo scrivere l'equazione della retta tangente in P al grafico della curva.
Com'è noto l'equazione della retta tangente è: $t_p: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, con $f(x_0) = b^{x_0}$ e $f'(x_0) = b^{x_0} \cdot \log b$; dunque $t_p: y - b^{x_0} = b^{x_0} \cdot \log b \cdot (x - x_0)$.

Questa retta interseca l'asse delle ascisse nel punto $A\left(x_0 - \frac{1}{\log b}; 0\right)$.

La retta s per P parallela all'asse delle ordinate ha equazione $s: x = x_0$ ed il punto in cui interseca l'asse x è $B(x_0; 0)$. La misura del segmento AB è

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = \left| x_0 - x_0 + \frac{1}{\log b} \right| = \left| \frac{1}{\log b} \right| = \frac{1}{|\log b|}$$

Come si vede, il valore della misura di AB è costante, è indipendente dal punto P scelto, dipende esclusivamente dalla base dell'esponenziale.

Per stabilire per quale valore della base b dell'esponenziale la misura di AB vale uno si deve risolvere l'equazione

$$\frac{1}{|\log b|} = 1 \rightarrow |\log b| = 1 \rightarrow \log b = \pm 1 \text{ da cui si ottengono i due valori } b_1 = e, b_2 = e^{-1}.$$

3. Considerando la funzione esponenziale

$y = e^x$, sia $Q(\alpha; e^\alpha)$ il punto di contatto tra il corrispondente diagramma del grafico G_e e la retta r passante per l'origine O degli assi coordinati e per Q . L'equazione della retta r è $r: y = e^\alpha x$

Dobbiamo determinare il valore α .

Osserviamo che il punto Q , appartenendo sia alla curva esponenziale che alla retta r , dovrà avere ordinata tale che risulti:

$$e^\alpha \alpha = e^\alpha \rightarrow \alpha = 1$$

Dunque, risulta $Q(1; e)$ e l'equazione della retta r è

$$r: y = ex$$

Misura dell'angolo formato dalla retta r con il semiasse positivo delle ascisse

Indicando con δ l'angolo formato dalla retta r con il semiasse positivo delle ascisse, dal significato di coefficiente angolare di una retta (pendenza della retta) si ha:

$$\tan \delta = e \rightarrow \delta = \arctg(e) = 1,107...(\text{rad})$$

Il Figura 3 l'ampiezza dell'angolo δ è espressa in gradi sessagesimali.

4. Osserviamo che il punto in cui la retta di equazione $y=e$ interseca la curva esponenziale $y = e^x$ è il punto $Q(1;e)$ precedentemente determinato come punto di contatto del grafico con la retta r . In Figura 4 la regione di cui si deve determinare l'area è riportata in colore. In virtù della teoria sull'integrazione definita, il valore dell'area della regione in oggetto è quello del seguente integrale definito

$$\int_{x=0}^1 (e - e^x) dx = [ex - e^x]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

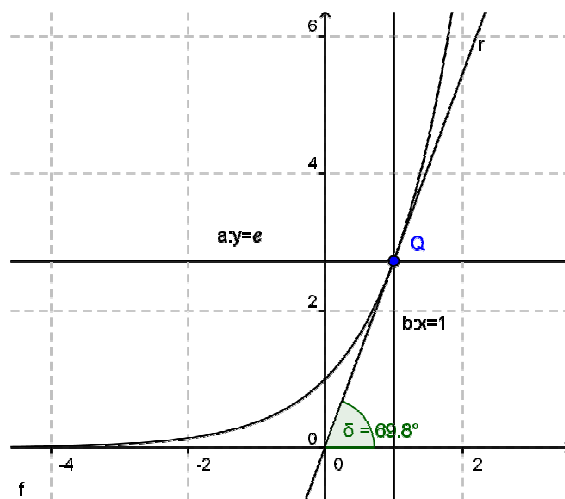


Figura 3

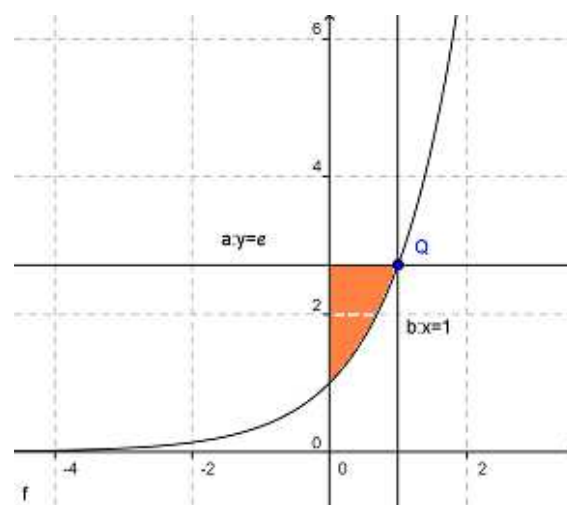


Figura 4