

PROBLEMA 1

Sia ABCD un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ .

1. Se $AP=x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$, $x \in \mathbb{R}$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0;1)$? E nel punto $S(1;0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, dove RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

Soluzione

A lato è riportata la figura geometrica di riferimento (Figura 1). Per osservare la sua dinamicità al variare del punto P sul lato AB aprire il file realizzato con GeoGebra. [Apri](#)

1. Premessa

Risolvi il problema proposto dal punto di vista generale, cioè supponiamo che la misura del lato del quadrato ABCD sia l e, con $\overline{AP} = x$, determiniamo la misura r del raggio della circonferenza λ in funzione di x e di l ; successivamente proseguiremo con lo sviluppo dei successivi quesiti ponendo $l=1$.

Osserviamo che il punto P può variare su tutto il segmento AB, dunque con $\overline{AP} = x$ si ha $0 \leq x \leq l$.

Detto r il raggio della circonferenza λ di centro Q e passante per C (si osservi che λ è tangente al lato DC del quadrato) risulta $\overline{BQ} = l - r$; inoltre, detto

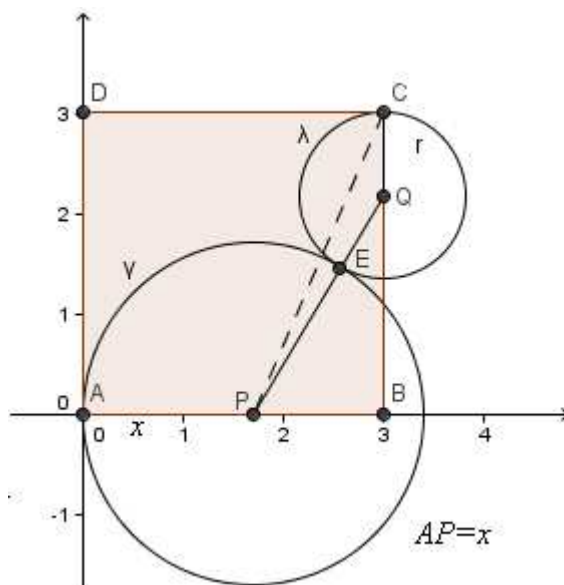
E il punto di contatto tra le due circonferenze γ e λ , notiamo che E è il punto in cui la circonferenza γ interseca il segmento PQ. Poiché PE è raggio di γ , deduciamo che $\overline{PQ} = x + r$.

Figura 1

Posiamo determinare la misura di r in funzione dei due parametri l ed x applicando il teorema di Pitagora al triangolo PBQ. Si ha:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 \rightarrow (x+r)^2 = (l-x)^2 + (l-r)^2 \rightarrow r = \frac{l(l-x)}{l+x}$$

Ponendo $l=1$ si ottiene l'espressione della funzione richiesta dal problema: $r = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.



2. Il diagramma della funzione $y = f(x)$ è quello di un'iperbole equilatera avente come centro il punto $\Omega(-1; -1)$. L'iperbole ha la retta $x+1=0$ come asintoto verticale e la retta $y+1=0$ come asintoto orizzontale. Il diagramma è riportato in Fig.2.

Invertibilità della funzione $y=f(x)$

La funzione considerata è definita nell'insieme $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ ed il suo codominio è ancora l'insieme A . dalle caratteristiche dell'iperbole equilatera (ma lo si potrebbe dedurre anche dallo studio della funzione derivata prima) è noto che la funzione $f(x)$ è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli aperti $]-\infty; -1[$, $]-1; +\infty[$, ma non è monotona in tutto il dominio di definizione. La funzione è

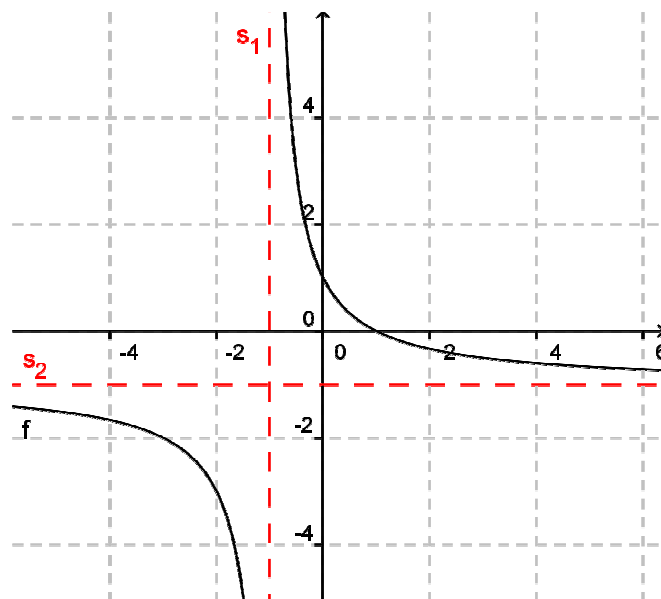


Figura 2

invertibile. Si riconosce graficamente questa proprietà osservando che il diagramma della curva taglia la retta $y=k$, con $k \neq -1$, in un solo punto. Algebricamente si determina l'espressione della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ risolvendo l'equazione $f(x)=y$, con $y \neq -1$, nell'incognita x . Si ha:

$$y = \frac{1-x}{1+x} \rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}, \quad \text{dunque } f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}$$

Qual è il grafico della funzione inversa?

Per rispondere a questa domanda ricordiamo che per definizione il grafico della funzione $y=f(x)$, definita nel dominio A , è il sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ formato da coppie ordinate

$G_f = \{(x; f(x)) \mid x \in A\}$ ed il diagramma della funzione è la rappresentazione del suo grafico nel piano cartesiano.

Il grafico della funzione inversa $f^{-1}(y)$, sempre dalla definizione, è l'insieme di coppie ordinate $G_{f^{-1}} = \{(y; f^{-1}(y)) \mid y \in A\}$. Poiché nel nostro caso il dominio della funzione inversa f^{-1} coincide con quello di f ed anche l'espressione algebrica delle due funzioni è identica, si deduce che il grafico f^{-1} coincide con quello di f .

Osservazione. In generale, quando si ha una funzione $f: A \rightarrow B$, con $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$, se f è invertibile ed f^{-1} è la sua funzione inversa, il grafico di f^{-1} non coincide affatto con quello di f . I due insiemi, se rappresentati nel piano cartesiano, danno luogo a due figure diverse. Nell'esercizio risolto ciò non si verifica perché l'iperbole equilatera, diagramma della funzione $y=f(x)$, ha la proprietà di essere simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

3. La funzione $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ ha lo stesso dominio della funzione f e coincide con essa

nell'intervallo $]-1; 1]$ mentre coincide con la funzione opposta $-f(x)$ nel complementare dell'intervallo $]-1; 1]$ rispetto al dominio A .

Poiché il punto $R(0; 1)$ ha ascissa $x=0$, valore interno all'intervallo $]-1; 1]$, la retta tangente al grafico di $g(x)$ coincide con la retta tangente al grafico di $f(x)$ e l'equazione è: $t_R: y = -2x + 1$ che si ottiene applicando la formula $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, con $x_0 = 0$ ed

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}.$$

Per quanto concerne il punto $S(1;0)$, esso, per il diagramma della funzione $g(x)$, è angoloso, quindi non esiste la retta tangente; esistono le due semitangenti. Lasciamo il compito al lettore di verificare che:

la semitangente sinistra è la semiretta

avente equazione $t_{s^-} : y = -\frac{1}{2}(x-1)$, con

$x < 1$;

la semitangente destra è la semiretta avente

equazione $t_{s^+} : y = \frac{1}{2}(x-1)$, con $x > 1$.

In Figura 3 sono rappresentati i diagrammi delle due funzioni $f(x)$, $g(x)$ (in colore blu), la retta tangente in R e le due semitangenti in S.

4. Calcolo dell'area del triangolo mistilineo ROS

Il valore dell'area richiesta è quello del seguente integrale definito

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx = -\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{1+x}\right) dx =$$

$$-\left[x - 2 \log(x+1)\right]_0^1 = -1 + 2 \log 2 \approx 0,386$$

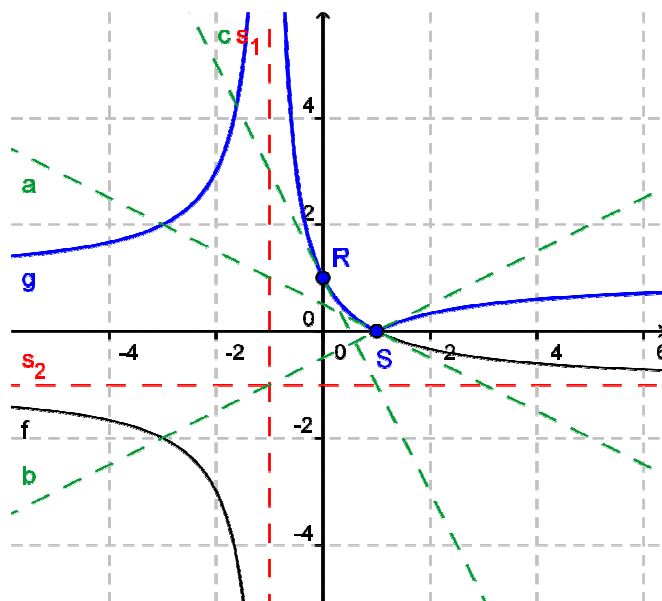


Figura 3

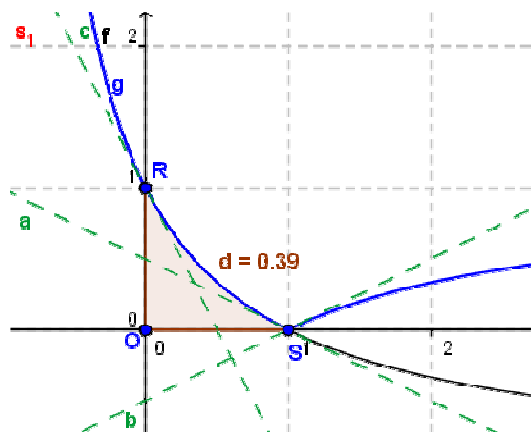


Figura 4