QUESITO 6

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione *senx*=0, con punto iniziale x_0=3. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

Soluzione

Si intuisce che l'autore del quesito nello scrivere << punto iniziale x_0=3>> abbia ritenuto (implicitamente) che 3 sia la misura in radianti dell'ampiezza dell'angolo x_0.
Ciò premesso, per la risoluzione del quesito occorre utilizzare il cosiddetto metodo delle tangenti o delle secanti di Newton-Fourier.
Sappiamo che gli zeri della funzione f(x)=senx sono i punti x = kπ, con k∈ Z. Lo zero più vicino al punto x_0=3 è x = π .

Tabella 1

n	x_n	x_{n+1}
0	1,8	6,086261675
1	6,086261675	6,285770917
2	6,285770917	6,283185301
3	6,283185301	6,283185307
4	6,283185307	6,283185307
5	6,283185307	6,283185307
6	6,283185307	6,283185307
7	6,283185307	6,283185307

Cosa dovrebbe fare il candidato?

- Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione y=senx nel punto (3;sen(3)) e determinare l'ascissa x_1 del punto di intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse.
- Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione y=senx nel punto (x_1;sen(x_1)) e determinare l'ascissa x_2 del punto di intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse. I valori

$x_0, x_1, x_2, \ldots$

sono dei valori approssimati della radice più prossima a al valore x_0=3 dell'equazione *senx*=0. Il candidato deve indicare quanto vale il punto x_2.
Posto $f(x)=sinx$, poiché la funzione derivata prima è $f'(x)=cosx$, l'equazione della retta tangente al grafico della sinusoide nel punto $x=x_0$ è

$t_0 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, che taglia l'asse delle ascisse nel punto

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \tan(x_0).$$

Iterando il procedimento, l'equazione della retta tangente nel punto x_1 è

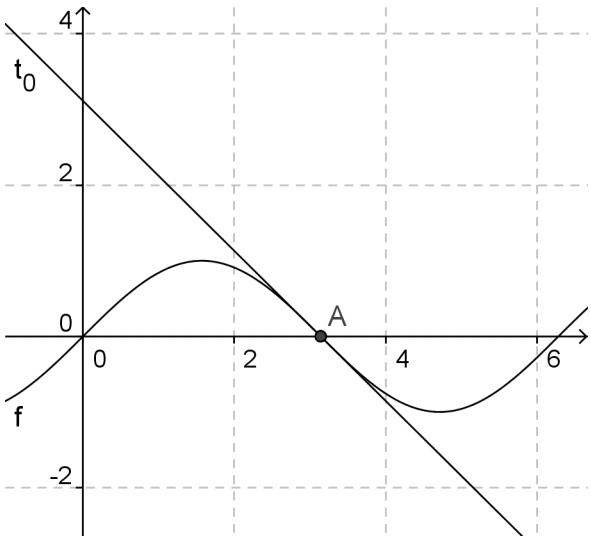
$t_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$, che taglia l'asse delle ascisse nel punto

$x_2 = x_1 - \tan(x_1)$.

Premesso che risulta π=3,1415926535897…, eseguendo i calcoli si ha:

$x_1 = 3 - \tan(3) = 3{,}1425465.. > \pi$; x_1 è un'approssimazione per eccesso di π;

$x_2 = x_1 - \tan(x_1) = 3{,}14159261.. < \pi$; x_2 è un'approssimazione per difetto di π



I due valori x_1, x_2 sono delle ottime approssimazioni della soluzione nota x=π dell'equazione in esame, essendo x=π la soluzione più prossima ad x_0=3. Si osservi

che $\pi - x_2 \approx 4,4 \cdot 10^{-7}$ e quindi se si assumesse come valore approssimato della soluzione x=π il valore x_2 si commetterebbe un errore inferiore ad un milionesimo.