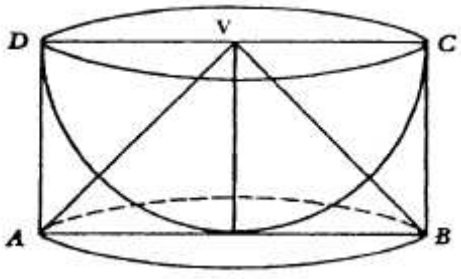
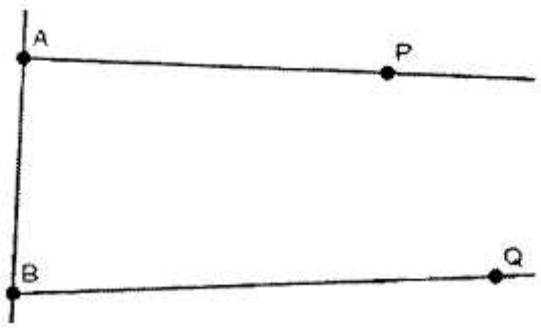
CORSO SPERIMENTALE
Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Siano : $0<a<b$ e $x\in[-b;b]$. Si provi che : $\int_{-b}^{b}|x-a|dx=a^2+b^2$
2. Sono dati gli insiemi $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c\}$. Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di A in B, ce ne sono di suriettive?, di iniettive?, di biiettive?.
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).
4. "*Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni*". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca un'esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:
$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.
6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $senx=0$, con punto iniziale $x_0=3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
9. Nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.



10. "*Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $P\hat{A}B$ e $Q\hat{B}A$ hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ , prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q,si devono intersecare*".
Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati?



QUESITI 1 e 2

1. Siano : $0<a<b$ e $x\in[-b;b]$. Si provi che : $\int_{-b}^{b}|x-a|dx=a^2+b^2$

Soluzione

Osserviamo che per le ipotesi poste sui numeri a e b sussiste la catena di disuguaglianze $-b<a<b$. Ciò premesso, relativamente all'intervallo di integrazione [-b;b], per quanto concerne la funzione integranda si può scrivere

$$|x-a|=\begin{cases}a-x & per \quad -b\le x<a\\ x-a & per \quad a\le x\le b\end{cases}$$

Per quanto riguarda l'integrale definito, tenendo presente quanto detto ed applicando la proprietà additiva possiamo scrivere:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|dx=\int_{-b}^{a}(a-x)dx+\int_{a}^{b}(x-a)dx=-\frac{1}{2}\left[(a-x)^2\right]_{-b}^{a}+\frac{1}{2}\left[(x-a)^2\right]_{a}^{b}=$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(b-a)^2=a^2+b^2$$

2. Sono dati gli insiemi $A=\{1,2,3,4\}, B=\{a,b,c\}$. Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di A in B, ce ne sono di suriettive?, di iniettive?, di biiettive?.

Soluzione

Esistono esattamente 3^4=81 funzioni $f:A\to B$ definite in A ed aventi valori in B. Tra esse non si trovano funzioni iniettive, quindi neanche biiettive, perché l'iniettività di una funzione richiede che le immagini di due elementi diversi siano diverse e dunque l'insieme delle immagini di una funzione iniettiva il cui insieme di definizione sia composto da quattro elementi è composto da quattro elementi. Visto che l'insieme B di arrivo è composto solo da tre elementi, almeno due elementi diversi del dominio avranno la stessa immagine.
Tra le 81 funzioni invece ce ne sono diverse che sono suriettive. Basta osservare che assegnando a tre elementi diversi del dominio tre immagini diverse, ad esempio f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c, qualche sia f(4) la funzione è suriettiva. Il lettore provi che esistono esattamente 12x3=36 funzioni suriettive.