Risoluzione e commento del Quesito 3

Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale.

Soluzione

Ricordiamo che:

- se la curva- diagramma della funzione $y = f(x)$ ammette tangente in un punto x_0 ed ivi la funzione è derivabile allora in quel punto la derivata prima della funzione si deve annullare;
- se nel punto $P(x_0;f(x_0))$ esiste la retta tangente al diagramma della funzione e la retta non è parallela all'asse delle ordinate allora esiste il coefficiente angolare della retta;
- il coefficiente angolare di una retta rappresenta la pendenza della retta rispetto all'asse delle ascisse e coincide con la tangente goniometrica dell'angolo che la retta forma con la direzione positiva del suddetto asse;
- per la funzione $y = f(x)$, dal significato geometrico della derivata prima nel punto x_0 è noto che questa coincide con la pendenza della retta tangente al diagramma della funzione nel punto $P(x_0;f(x_0))$ e poiché una retta parallela all'asse della ascisse ha pendenza nulla, nel punto x_0 deve essere $f'(x_0) = 0$;
- la funzione polinomio è continua e derivabile su tutto l'asse reale. I valori da determinare per il parametro k devono essere tali che la corrispondente funzione abbia la derivata prima che si annulli solo in un punto del suo dominio. Si deve dunque impostare la seguente equazione:

$y' = 3x^2 + 2kx + 3 = 0$

e richiedere che sia soddisfatta da un unico valore per x.

L'equazione è di secondo grado e parametrica, con parametro k. Al variare del parametro l'equazione può ammettere due radici reali e distinte, due radici reali e coincidenti, oppure due radici complesse coniugate. Noi siamo interessati che le radici siano reali e coincidenti, perciò il discriminante deve essere nullo. Dunque, la condizione richiesta è

$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 9 = 0 \rightarrow k = \pm 3$

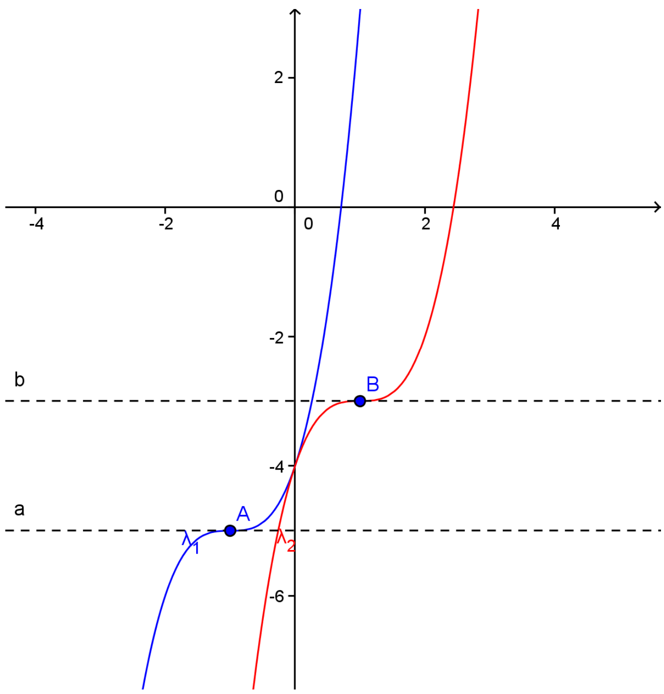
Conclusione

Esistono dunque due diverse curve le cui equazioni si deducono dall'equazione parametrica assegnata che hanno la proprietà richiesta e le loro equazioni sono

$\lambda_1 : y = x^3 + 3x^2 + 3x - 4$,

$\lambda_2 : y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$

La prima ha la tangente orizzontale nel punto A(-1;-5), la seconda ha la tangente orizzontale nel punto B(1;-3). Nella figura riportata a lato si possono osservare le due curve.



Commento

Il quesito è semplice; la sua risoluzione non presenta nessuna difficoltà nei calcoli. Il candidato deve essere solo a conoscenza del significato geometrico della derivata prima e deve sapere quando un'equazione parametrica di secondo grado ammette una sola radice (doppia).

Livello di difficoltà : 1-2

Proposta migliorativa

Si sarebbe potuto rendere molto più interessante il quesito se fosse stato richiesto al candidato di rappresentare, anche approssimativamente, i diagrammi delle due cubiche ottenute per i due valori di k. Il lavoro si sarebbe potuto realizzare in circa 20 minuti ed offrire al candidato la soddisfazione di dimostrare le proprie conoscenze su questo tipo di funzioni, nonché le proprie capacità grafiche. Questa mia riflessione è giustificata dal fatto che spesso nel corso dell'anno i docenti fanno svolgere studi di funzioni polinomiali ai loro allievi ed in genere questi son ben preparati sull'argomento; osservo che nella prova di quest'anno, ad eccezione di quanto si dirà nel successivo quesito n.8, non vi è alcun quesito, né tra quelli dei due problemi, né tra quelli componenti il questionario, che richieda lo studio di una funzione polinomiale.