Esame di Stato di Liceo Scientifico- Corso Sperimentale PNI-Sessione Ordinaria 2009
Pubblicato il 27 giugno 2009

Problema 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f : R \to R$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di *f* al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta di equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia **D** la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di **D**.
4. La regione **D** è la base di un solido **W** le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di **W**.

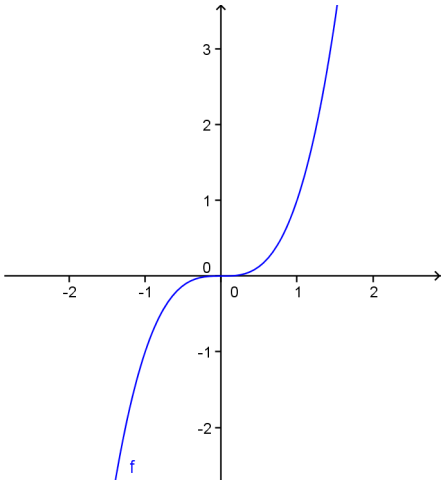
Soluzione

1. La funzione in esame è un polinomio di terzo grado. Per qualunque valore di k è definita su tutto R, è continua ed ammette derivate di qualsiasi ordine. Analizziamola al variare di k considerando i casi k=0, k>0, k<0.

Caso k=0

La funzione diventa $f(x) = x^3$, che rappresenta un caso notevole. Riportiamo, comunque, le caratteristiche fondamentali.

Figura 1



La funzione assume valori positivi per ogni x>0, negativi per x<0, si annulla solo per x=0. Possiamo osservare che $f(-x) = -f(x)$, dunque la funzione è dispari ed il suo diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani. Dallo studio dei limiti $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, si deduce che la funzione non è limitata, che Inf(*f*)=-∞, che Sup(*f*)=+∞. Inoltre, ricordiamo, che la funzione polinomio con grado maggiore di uno ha un grafico che non ammette asintoti di alcun genere. Il codominio della funzione è tutto R.

La funzione derivata prima è $f'(x) = 3x^2$ che assume valore positivo per ogni x≠0 e si annulla per x=0. La funzione è strettamente crescente in ogni punto del dominio. Il punto x=0, punto critico, è di flesso ascendente, come si riconosce dal segno della derivata seconda : $f''(x) = 6x$, che assume segno negativo per x<0 (curva concava), positivo per x>0 (curva convessa) e si annulla per x=0.

La funzione non ammette punti di minimo relativo, né di massimo relativo.

Il suo diagramma è rappresentato approssimativamente in **Figura 1**.

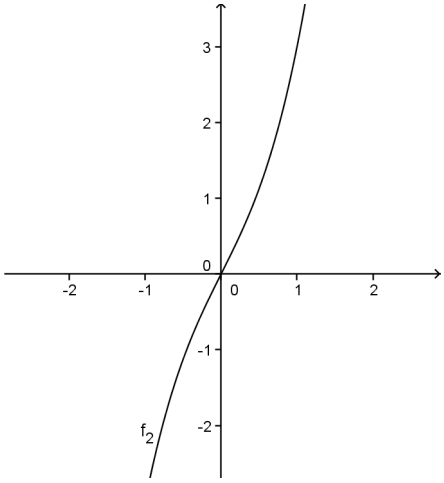
Caso k>0

Per questi valori del parametro, osservato che si può scrivere $f(x) = x\left(x^2 + k\right)$, valgono le proprietà di seguito indicate.

- La funzione assume valori positivi per ogni x>0, negativi per x<0, si annulla solo per x=0.
- $f(-x) = -f(x)$, per ogni x del dominio, dunque la funzione è dispari ed il suo diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

- Dallo studio dei limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, si deduce che la funzione non è limitata, che Inf(*f*)=-∞, che Sup(*f*)=+∞. Il diagramma della funzione non ammette asintoti di alcun genere ed il codominio è tutto R.
- La funzione derivata prima $f'(x)=3x^2+k$ assume valori strettamente positivi in ogni punto del dominio, dunque la funzione è strettamente crescente, non presenta punti critici e non ha punti di massimo, né di minimo relativo.
- Il punto x=0 è di flesso ascendente, come si riconosce dal segno della derivata seconda : $f''(x)=6x$, che assume segno negativo per x<0 (curva concava), positivo per x>0 (curva convessa) e si annulla per x=0. La retta tangente (inflessionale) al diagramma nel punto di flesso ha equazione y=kx. Si badi che si tratta di un flesso a tangente obliqua.
- Il diagramma nel caso particolare k=2 della funzione è rappresentato approssimativamente in **Figura n.2**

Figura 2- caso k=2



Caso k<0

Per questi valori del parametro, scrivendo ancora la funzione nella forma $f(x)=x\left(x^2+k\right)$, si riconosce che valgono le proprietà di seguito indicate.

- La funzione assume valori positivi in ciascuno degli intervalli $\left]-\sqrt{-k};0\right[$, $\left]\sqrt{-k};+\infty\right[$ e segno negativo in ciascuno degli intervalli $\left]-\infty;-\sqrt{-k}\right[$, $\left]0;\sqrt{-k}\right[$.
- $f(-x)=-f(x)$, per ogni x del dominio, dunque la funzione è dispari ed il suo diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.
- Dallo studio dei limiti $\lim_{x\to-\infty} x\left(x^2+k\right)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x\left(x^2+k\right)=+\infty$, si deduce che la funzione non è limitata, che Inf(*f*)=-∞, che Sup(*f*)=+∞. Il diagramma della funzione non ammette asintoti di alcun genere ed il codominio è tutto R.
- La funzione derivata prima $f'(x)=3x^2+k$ assume valori strettamente positivi in ogni punto di ciascuno degli intervalli $\left]-\infty;-\sqrt{-\frac{k}{3}}\right[$, $\left]\sqrt{-\frac{k}{3}};+\infty\right[$; in ciascuno dei suddetti intervalli la funzione è strettamente crescente. In ogni punto dell'intervallo $\left]-\sqrt{-\frac{k}{3}};\sqrt{-\frac{k}{3}}\right[$ la derivata prima è negativa e dunque in detto intervallo la funzione è strettamente decrescente. Il punto $x_1=-\sqrt{-\frac{k}{3}}$ è di massimo relativo proprio, con il valore $f\left(x_1\right)=-\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}$; il punto $x_2=\sqrt{-\frac{k}{3}}$ è di minimo relativo proprio con $f\left(x_2\right)=\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}$

- La derivata seconda della funzione è ancora $f''(x)=6x$, non dipende dal parametro ed il punto x=0 è ancora un punto di flesso (a tangente obliqua) ascendente. La curva è concava per x<0 e convessa per x>0. La retta tangente (inflessionale) al diagramma nel punto di flesso ha ancora equazione y=kx.
- Il diagramma della funzione nel caso particolare k=-2 è rappresentato approssimativamente in **Figura n.3**

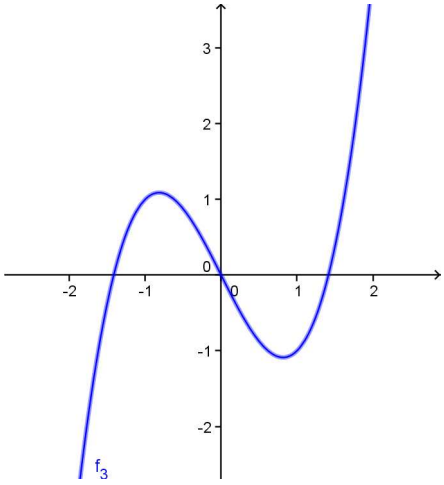


Figura 3 – Caso k=-2

2. La funzione $g(x)=x^3$ è la funzione *f* corrispondente al valore k=0 che abbiamo già analizzato e rappresentato sopra. Si tratta ora di realizzare un diagramma in cui compaia anche la retta di equazione y=1-x. Il disegno è quello riportato in **Figura 4.**

Per determinare i punti di intersezione tra la retta ed il diagramma della curva corrispondente alla funzione g si deve risolvere il sistema formato dalle loro equazioni.

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=1-x \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione risolvente $x^3+x-1=0$. Posto $\varphi(x)=x^3+x-1$, dallo studio del segno della derivata prima $\varphi'(x)=3x^2+1$, si riconosce che la funzione è strettamente crescente in tutto R e avendosi $\varphi(0)=-1<0$, $\varphi(1)=1>0$, dal teorema di esistenza degli zeri sappiamo che la funzione si annulla in almeno un punto interno all'intervallo]0;1[. La stretta crescenza implica che il punto sarà unico ed è l'ascissa del punto P di cui si parla nel testo. Nella **Tabella1** sono riportati alcuni valori approssimati dell'ascissa di P.

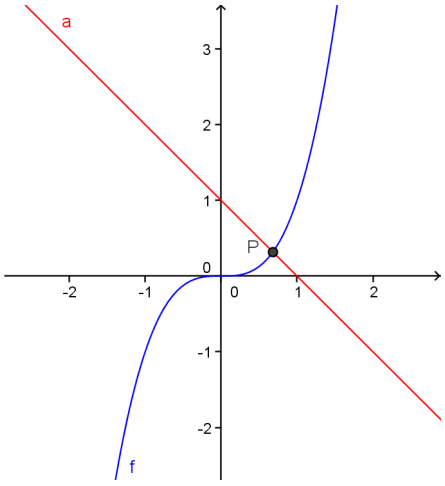


Figura 4-

Avendo ottenuto che il valore dell'ascissa cercata appartiene all'intervallo $\left]\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right[$, ed essendo l'ampiezza di questo intervallo $l=\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}=0{,}125$, assumendo come valore per l'ascissa quello del punto medio dell'intervallo, cioè $x_P=\frac{11}{16}$, si è certi che l'errore commesso è inferiore alla semiampiezza dell'intervallo stesso che è $\frac{l}{2}=\frac{1}{16}=0{,}0625<0{,}1$. Il valore indicato soddisfa dunque la richiesta del quesito.

Tabella1- Ricerca del valore dell'ascissa di P

x	$g(x)=x^3$	Y=1-x	$x_P=\alpha$
0	0	1	
1	1	0	$0<\alpha<1$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<\alpha<1$
$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$
$\frac{5}{8}$	$\frac{125}{512}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}<\alpha<\frac{3}{4}$

3. La funzione $g(x)=x^3$ è biunivoca è posto y=g(x) la funzione inversa è

$g^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y}$, con $y \in R$.

Osservazione

Si tenga presente che il diagramma cartesiano della funzione inversa $g^{-1}(y)$ *nel riferimento Oxy in cui è rappresentata la funzione* $y=g(x)$ *coincide esattamente con il diagramma di quest'ultima, la differenza consiste nel fatto che nel considerare la funzione inversa la variabile indipendente è y e non x, ma rappresentando le coppie ordinate* $\left(\sqrt[3]{y}; y\right)$ *si ottiene esattamente la stessa curva che si ha con le coppie ordinate* $(x;x^3)$.
Cosa significa questa precisazione?
Nell'esercizio l'autore del testo dà per scontato (cosa che fanno molti autori, sbagliando) che nel considerare la funzione inversa l'operatore (in questo caso il candidato) effettui anche uno scambio di ruoli tra le variabili scambiandone i nomi: come variabile indipendente è assunta x e come variabile dipendente y e difatti si considera $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ *e successivamente si considera la nuova funzione di equazione* $y = \sqrt[3]{x}$ *di cui si rappresenta il grafico. A mio avviso è necessario chiarire la prassi, per evitare disorientamenti.*

Nello stesso riferimento cartesiano si rappresentano le due funzioni $g(x) = x^3$, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e si considera la regione finita di piano del primo quadrante delimitata dalle due curve. Si osserva che le due curve hanno in comune i punti (0;0) e (1;1), oltre che (-1;-1) che appartiene al terzo quadrante. Le due curve sono anche simmetriche rispetto alla bisettrice y=x del primo e terzo quadrante. L'area della regione di piana **D** richiesta si ottiene dal calcolo del seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^3\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Vedi **Figura 5**.

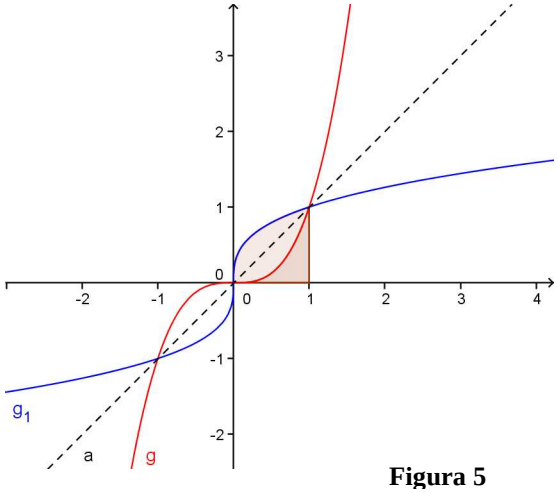


Figura 5

4. Il solido **W** sezionandolo con un piano perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante fornisce un rettangolo di altezza h=12. Dunque **è un cilindro finito retto** il cui volume si ottiene moltiplicando l'area di D per l'altezza:

$$Vol(W) = Area(D) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

Per quanto concerne la sezione di area massima, è evidente che è la sezione che ha la massima misura della base tra tutte le sezioni, visto che le sezioni hanno tutte la stessa altezza 12. Per determinare la misura della sezione di area massima si deve considerare il generico punto P sull'arco di g e determinare il simmetrico P' rispetto alla bisettrice y=x; il segmento PP′ rappresenta la base della sezione tra W ed il piano perpendicolare alla bisettrice passante per P. Si determina la misura b(x) del segmento PP′ e per x variabile nell'intervallo [0;1] se ne determina il massimo.

Si ha $P\left(x; x^3\right)$, $P'\left(x^3; x\right)$;

$$b(x) = \overline{PP'} = \sqrt{2\left(x - x^3\right)^2} = \sqrt{2}\left|x - x^3\right|.$$

Tenendo presente che per $x \in [0;1]$ risulta $x \geq x^3$ si può eliminare il segno di modulo ed ottenere

$b(x)=\sqrt{2}\left(x-x^3\right)$.

La funzione ottenuta è continua e poiché la dobbiamo considerare relativamente all'intervallo chiuso [0;1] siamo certi per il teorema di Weierstrass che ammette massimo.
La funzione è anche derivabile, dunque sfruttiamo il segno della funzione derivata prima.

$b'(x)=\sqrt{2}\left(1-3x^2\right)$.

$b'(x)>0$, per $x\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$; nell'intervallo la funzione è strettamente crescente.

$b'(x)<0$, per $x\in\left]\frac{1}{\sqrt{3}};1\right]$; nell'intervallo la funzione è strettamente decrescente.

$b'(x)=0$, solo per $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Questo punto è di massimo assoluto e si ha

$$b_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

Concludiamo che l'area della sezione avente area massima è

$$S_{\max}=b_{\max}\cdot 12=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$