COMMENTO AI QUESITI DEL QUESTIONARIO

1. Siano : $0<a<b$ e $x\in[-b;b]$. Si provi che : $\int_{-b}^{b}|x-a|\,dx=a^2+b^2$

Commento

Il quesito è interessante perché presenta come funzione integranda una funzione con valore assoluto, per la cui gestione nel processo di integrazione il candidato deve analizzare la posizione della variabile indipendente rispetto al valore *a*. Una volta scritto l'integrale definito di partenza nella somma di due integrali definiti con funzione integranda priva di modulo il calcolo da eseguire non presenta alcuna difficoltà.
Livello di difficoltà : 3

2. Sono dati gli insiemi $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c\}$. Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di A in B, ce ne sono di suriettive?, di iniettive?, di biiettive?.

Commento

Per rispondere correttamente al quesito basterebbe affermare: "Non ci sono funzioni iniettive perché il numero degli elementi del dominio è maggiore del numero degli elementi dell'insieme di arrivo; ciò implica che non esistono neanche funzioni biunivoche. Esistono invece delle funzioni suriettive come lo è, per esempio, la funzione che opera in questo modo: f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c, f(4)=a."
Livello di difficoltà : 1

Il quesito sarebbe stato molto più interessate se l'autore avesse chiesto di determinare tutte le eventuali funzioni che avessero una certa proprietà. In questo caso il livello di complessità del quesito sarebbe stato molto più alto.

3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).

Commento

Il quesito è interessante perché permette all'esaminatore di valutare le capacità di analisi del candidato che si accinge ad affrontare un problema non standard. Per risolvere il quesito **occorre individuare l'elemento geometrico che gioca un ruolo centrale nel problema posto**: l'elemento geometrico è **il centro della moneta**. Il candidato deve scoprire quale posizione può occupare sulla mattonella il centro della moneta. Una volta individuata la regione piana permessa e calcolato la sua area si perviene alla determinazione della probabilità richiesta calcolando il rapporto tra l'area della regione utile alle posizioni della moneta e l'area dell'intera mattonella.
Livello di difficoltà : 3

4. "*Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni*". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca un'esauriente spiegazione della risposta.

Commento

Il quesito è di natura prettamente teorica. Il candidato per rispondere correttamente deve ricordare le proprietà dei poliedri regolari, nonché dei triedri. Gli argomenti relativi rientrano nello studio della geometria euclidea dello spazio che si sviluppa normalmente nel corso del quarto anno del liceo scientifico e ricordare puntualmente in sede d'esame teoremi e proprietà delle figure geometriche studiati negli anni precedenti non è agevole. Per questo motivo, se la

soluzione presentata dal candidato è ben argomentata può essere valutata con il massimo dei punteggi riconoscibili ad un quesito del questionario.
Livello di difficoltà : da 4 a 5

5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

Commento

Il quesito mira a verificare se il candidato riesce ad intuire che le espressioni proposte, a parte la prima (ovvia), sono forme caratteristiche in cui si può presentare un limite. La risposta da dare non è difficile e per la verità il testo non richiede neanche che il candidato fornisca qualche esempio.
A mio avviso si può rendere molto interessante il quesito se si richiede al candidato di fornire un esempio applicativo per ciascuna delle ultime tre forme. In questo caso si potrebbe riconoscere un punteggio alto all'elaborato ed avere la possibilità di far emergere le competenze di cui molti candidati sono in possesso.
Livello di difficoltà : 2

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione *senx*=0, con punto iniziale x_0=3. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

Commento al quesito osservazione sul metodo delle tangenti e delle secanti

Il metodo delle tangenti o delle secanti, per la sua applicazione richiede che internamente all'intervallo [a;b] in cui è presente uno zero della funzione questa sia derivabile due volte e che la derivata seconda mantenga lo stesso segno. Nel nostro caso non è fissato un intervallo in cui cercare lo zero e, per la verità, sappiamo già qual è lo zero. Ma se [a;b] dovesse contenere $x=\pi$, per esempio con a=3 e $b=1,5\pi$, facciamo notare che nell'intervallo $[a;\pi[$ la derivata seconda è negativa, mentre è positiva nell'intervallo $]\pi;1,5\pi[$. Il metodo iterativo delle tangenti o delle secanti non è applicabile. Per convincersi dell'affermazione si provi a prendere come punto iniziale x_0=1,8 (rad) e si applichi il metodo delle tangenti. Il punto cui converge la successione x_n che viene generata non è $x=\pi$, ma $x=2\pi$ (vedi **Tabella 1**); con punto iniziale x_0=1,9 (rad) la successione converge addirittura al punto $x=4\pi$. Se si sceglie come punto iniziale x_0=2 la successione converge ad $x=\pi$, come si evince

Tabella 1

n	x_n	x_{n+1}
0	1,8	6,086261675
1	6,086261675	6,285770917
2	6,285770917	6,283185301
3	6,283185301	6,283185307
4	6,283185307	6,283185307
5	6,283185307	6,283185307
6	6,283185307	6,283185307
7	6,283185307	6,283185307

dalla tabella di dati **Tabella 2**. Anche con $x_0=3$ la successione converge al punto $x=\pi$ e le elaborazioni sono riportate in Tabella 3.

Tabella 3

N	x_n	x_{n+1}
0	3	3,142546543074
1	3,142546543074	**3,141592653300**
2	**3,141592653300**	3,141592653590
3	3,141592653590	3,141592653590
4	3,141592653590	3,141592653590
5	3,141592653590	3,141592653590
6	3,141592653590	3,141592653590
7	3,141592653590	3,141592653590

Tabella 2

n	x_n	x_{n+1}
0	2	4,185039863
1	4,185039863	2,467893675
2	2,467893675	3,266186278
3	3,266186278	3,140943912
4	3,140943912	3,141592654
5	3,141592654	3,141592654
6	3,141592654	3,141592654
7	3,141592654	3,141592654

In conclusione ritengo che sia stato formulato il quesito non per verificare se il candidato conoscesse a fondo il metodo iterativo di Newton per la ricerca dello zero di una funzione e lo sapesse applicare consapevolmente, quanto per verificare se egli ricordasse approssimativamente l’algoritmo da implementare per cercare delle approssimazioni dello zero della specifica funzione con il metodo suggerito, detto delle tangenti o delle secanti e, probabilmente, facesse delle valutazioni sul grado di precisione dell’approssimazione ottenuta.

Livello di difficoltà : 4 - 5

7. Si dimostri l’identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

Commento

Il quesito mira a verificare se il candidato conosce il significato di coefficiente binomiale e sa operare con essi.

Livello di difficoltà : 2-3

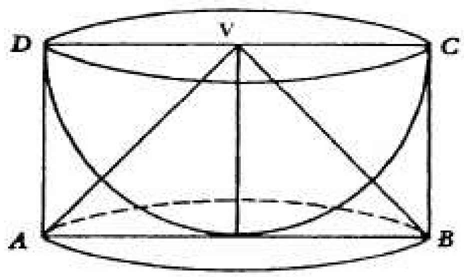
8. Alla festa di compleanno di Anna l’età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l’età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

Commento

Il quesito è semplicissimo. Potrebbe essere risolto da un alunno del primo liceo scientifico.

Livello di difficoltà : 1

9. Nei “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*”, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio *r* e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.

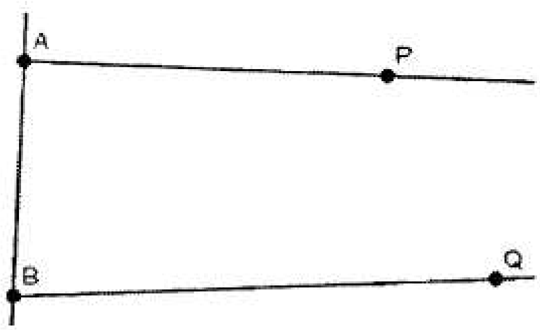


Soluzione

La dimostrazione richiesta al candidato si trova su ogni testo di geometria dello spazio. Non riteniamo di doverla riportare qui.

Commento

La dimostrazione richiesta dal quesito è piuttosto laboriosa. Si aggiunga che l'argomento non rientra nei programmi svolti normalmente nel quinto anno del liceo. Per questi motivi ritengo che se lo sviluppo è fatto bene e completamente al candidato si possa riconoscere il massimo punteggio previsto per un quesito.
Livello di difficoltà : 4-5



10. "*Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli* $P\hat{A}B$ *e* $Q\hat{B}A$ *hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ , prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q,si devono intersecare*". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati?

Commento

Il quesito mira solo a verificare se il candidato sappia o meno dell'esistenza di geometrie non euclidee ed in caso affermativo a che livello siano le sue conoscenze.
La valutazione per lo sviluppo delle riflessioni del candidato può andare dal minimo punteggio al massimo punteggio previsto per un quesito.
Livello di difficoltà : 1-5

Tabella riepilogativa dei livelli di difficoltà dei quesiti Componenti il QUESTIONARIO della prova di matematica del PNI assegnata nell'Esame di Stato di Liceo Scientifico nella Sessione Ordinaria del 2009					
Quesito	Liv.1	Liv.2	Liv.3	Liv.4	Liv.5
1			X		
2	X				
3				X	X
4				X	X
5		X			
6				X	X
7		X	X		
8	X				
9				X	X
10	X	X	X	X	X