

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Indirizzo : PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO: Q4

1. Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 - 1704) e la si applichi per dimostrare

che è: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$

Soluzione

La regola di de L'Hôpital è un teorema la cui applicazione permette di studiare limiti che si presentano in una delle forme indeterminate $0/0$, ∞/∞ ed il suo enunciato è il seguente.

Teorema

Siano f e g due funzioni reali definite in $A \subseteq \mathbb{R}$ ed x_0 un punto di accumulazione per il dominio A della funzione f/g :

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : A \rightarrow \mathbb{R}$$

Nelle ipotesi che

- a) il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenti nella forma $0/0$ o ∞/∞ ;
- b) esiste un intorno $I(x_0)$ del dominio A in cui le funzioni f, g siano derivabili con $g'(x) \neq 0$;
- c) esiste il limite del rapporto delle funzioni derivate $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

allora esiste anche il limite del rapporto delle due funzioni f, g ed il suo valore è uguale al limite del rapporto delle funzioni derivate. In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Applicazione allo studio del limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞ e le due funzioni $f(x) = x^{2008}$, $g(x) = 2^x$ verificano le ipotesi previste nel teorema. Il teorema è dunque applicabile.

Osserviamo, però, che dopo la prima applicazione del teorema la forma del limite non cambia, ma le funzioni derivate verificano a loro volta ancora le ipotesi del teorema, per cui il teorema è nuovamente applicabile. Si riconosce che il processo si può iterare e dopo averlo applicato 2008 volte il limite si riduce ad una forma che permette di concludere che il valore del limite è zero.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2008x^{2007}}{2^x \cdot \log 2} \stackrel{H.}{=} \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2008!}{2^x \cdot (\log 2)^{2008}} = 0$$