

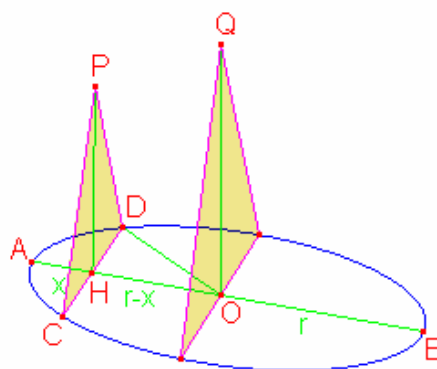
Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Indirizzo : PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO: Q3

3. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1 . Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

Soluzione

Consideriamo il diametro AB del cerchio di base e la corda CD, perpendicolare ad AB, che scorre descrivendo il cerchio. Nella figura riportata a lato sono stati disegnati due corde parallele tra loro ed i rispettivi triangoli equilateri ottenuti come sezioni tra il solido considerato ed i corrispondenti piani. Abbiamo indicato con r la misura del raggio del cerchio, con x la misura del segmento AH, essendo H il piede dell'altezza del triangolo equilatero CDP.



Da semplici considerazioni geometriche si deduce che il solido è simmetrico rispetto al piano perpendicolare al diametro AB e passante per il centro O del cerchio. Il volume del solido è dunque il doppio di quello del solido descritto dal triangolo PCD quando CD descrive metà del cerchio di base. Pertanto, ponendo $\overline{AH} = x$, possiamo limitare le elaborazioni per $0 \leq x \leq r$.

Osserviamo che $\overline{OH} = r - x$ e che applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ODH si ricava

$$\overline{HD} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{HO}^2} = \sqrt{r^2 - (r - x)^2} = \sqrt{2rx - x^2} \rightarrow \overline{PD} = \overline{CD} = 2\sqrt{2rx - x^2} ;$$

$$\overline{PH} = \overline{PD} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2rx - x^2} ;$$

$$S(x) = A_{\text{re}}(CDP) = \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{PH} = \sqrt{3} (2rx - x^2)$$

Ricordando che il raggio del cerchio di base è unitario si ha $S(x) = \sqrt{3} (2x - x^2)$.

Il volume V del solido in esame si calcola con il seguente integrale definito:

$$V = 2 \int_{x=0}^1 S(x) dx = 2\sqrt{3} \int_{x=0}^1 (2x - x^2) dx = 2\sqrt{3} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$