Esame di Stato di Liceo Scientifico

Corso sperimentale PNI

Sessione Ordinaria 2007

QUESTIONARIO (quesito n.7)

7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1, 2).

Soluzione

Le circonferenze tangenti alla parabola $\gamma : y = x^2 + 1$ nel punto A(1;2) sono quelle che risultano tangenti nel punto A alla retta *t* tangente alla parabola nello stesso punto. Infatti, per definizione, due curve sono tangenti in un punto se in detto punto ammettono la stessa retta tangente. Premesso ciò, si deduce che i centri delle circonferenze in questione saranno sulla retta *n* contenuta nel piano della parabola che risulta perpendicolare a *t* nel punto A. La retta *n* è detta normale alla parabola γ in A ed essa rappresenta il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti a γ in A.

Per determinare l'equazione della retta *n* troviamo innanzitutto l'equazione della retta tangente *t*. Posto $f(x)=x^2+1$, dalla teoria delle derivate, è noto che il coefficiente angolare della retta t è il valore della derivata prima della funzione nel punto x=1 e la forma dell'equazione è $t : y - f(1) = f'(1)(x-1)$. Essendo $f'(1) = 2$, si ricava per la tangente la seguente equazione $t : y = 2x$.

Ricordiamo ora che in un piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale xOy, considerata la retta *r*:*y*=*mx*+*q*, ogni retta ad essa perpendicolare ha coefficiente angolare m′ = -1/m, per cui l'equazione della retta normale *n* richiesta, dovendo passare per A(1;2), è

$$n : y - y_A = -\frac{1}{m}(x - x_A) \rightarrow$$

$$n : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Nella figura riportata a lato sono rappresentate la parabola γ, la retta tangente *t*, la normale *n* e cinque circonferenze tangenti a γ nel punto A(1;2).