Esame di Stato di Liceo Scientifico

Corso sperimentale PNI

Sessione Ordinaria 2007

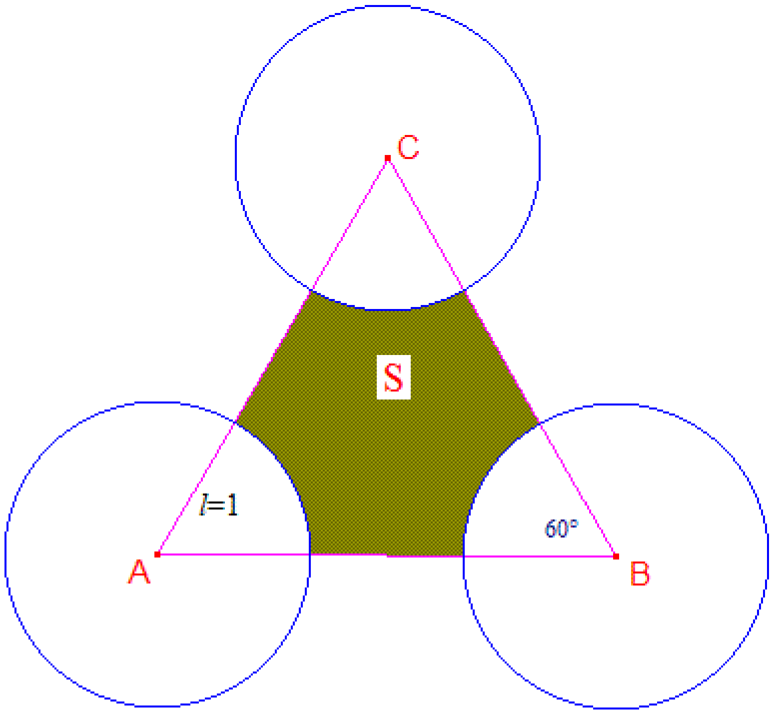
QUESTIONARIO (quesito n.6)

6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.

Soluzione

Si consideri il triangolo equilatero ABC, con il lato di misura l=3. La probabilità richiesta è data dal rapporto tra l'area della regione piana S appartenente al triangolo equilatero considerato in cui può variare il punto P e l'area di tutto il triangolo equilatero.

Ricordiamo che l'area di un triangolo equilatero il cui lato misura l è $\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Per quanto concerne l'area di S osserviamo che questa si ottiene sottraendo al triangolo ABC i tre settori circolari che si ottengono intersecando il triangolo ABC con i cerchi aventi raggio r=1 e centro in uno dei vertici A, B, C del triangolo. Nella figura di riferimento riportata la regione S è in colore.



Osserviamo ora che ciascuno dei tre settori ha area uguale alla sesta parte dell'area del cerchio corrispondente e l'area di ciascuno cerchio, avendo il raggio di misura unitaria, è π; pertanto la somma delle aree dei tre settori circolari è 3π/6=π/2.

L'area del triangolo ABC, con l=3, è

$$Area(ABC) = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

e dunque l'area della regione S è

$$Area(S) = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Possiamo ora determinare il valore della probabilità che il punto P appartenga alla regione S.

$$p = \frac{Area(S)}{Area(ABC)} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = 1 - \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} \approx 59,7\%$$