Esame di Stato di Liceo Scientifico

Corso sperimentale PNI

Sessione Ordinaria 2007

QUESTIONARIO (quesito n.4)

4. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di come tali parametri influenzino il grafico di *f(x)*.

Soluzione

La funzione indicata **rappresenta la funzione di densità di probabilità** di una variabile casuale continua reale X che può assumere qualsiasi valore reale x appartenente ad R. Tramite essa, fissato l'intervallo [a;b], si determina il valore della probabilità p(x) che la variabile casuale X assuma valori in quell'intervallo e risulta

$$p(x) = \ p\left(a \le X \le b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Poiché la variabile casuale X si suppone che possa assumere qualsiasi valore reale evidentemente risulterà $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$.

I parametri μ e σ rappresentano rispettivamente il valore medio e lo scarto quadratico medio della variabile casuale X, mentre σ^2 rappresenta la varianza di X.

La funzione in oggetto è nota anche come la distribuzione normale di Gauss (1777-1855) e rappresenta il modo in cui si distribuiscono le frequenze dei valori delle misure di una grandezza quando le misure siano eseguite un numero elevato di volte in presenza di errori accidentali (casuali) che non si possono eliminare. Ad esempio

- In laboratorio di fisica uno studente segue per 30 volte accuratamente la misura del diametro di una sferetta di legno utilizzando un calibro palmer.
- 25 studenti di una classe, utilizzando lo stesso calibro palmer o calibri diversi ma con la stessa sensibilità, rilevano ciascuno accuratamente per due volte la misura del diametro di un tubicino di vetro. Si ottengono 50 misure. Raggruppando per classi i valori ottenuti, la numerosità (la frequenza della misura) dei valori delle diverse classi si distribuisce solitamente secondo una curva gaussiana.

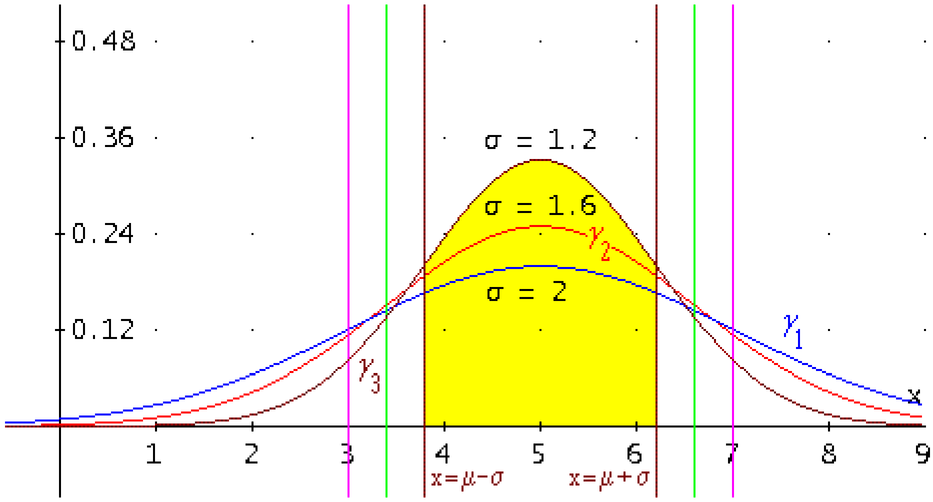
Due variabili casuali possono avere lo stesso valore medio μ, ma diverso valore per lo scarto quadratico medio σ. In questo caso, delle due funzioni di densità di probabilità, quella avente valore minore di σ presenta un grafico più stretto e più slanciato verso l'alto, cioè, il il valore massimo della funzione di densità avente minior valore dello scarto quadratico medio è maggiore de corrispondente valore dell'altra. In ogni caso il valore massimo è $1/\sigma\sqrt{2\pi}$.

Nella figura seguente sono rappresentati i diagrammi delle funzioni di densità di probabilità relative ai seguenti valori dei parametri

γ_1: $\mu=5$, $\sigma=2$

γ_2: $\mu=5$, $\sigma=1,6$

γ_3: $\mu=5$, $\sigma=1,2$



Per le variabili casuali continue la cui funzione di densità di probabilità sia una funzione gaussiana è noto che sussistono le seguenti probabilità:

$p(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = 0{,}6826$,

$p(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = 0{,}9544$,

$p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = 0{,}9974$

Nel grafico riportato sopra abbiamo evidenziato in colore il valore della probabilità $p(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = 0{,}6826$ relativamente alla funzione di densità avente il minor valore per lo scarto quadratico medio: σ=1,2.

Un'altra proprietà

La curva gaussiana presenta due flessi le cui ascisse sono $x_1 = \mu-\sigma$, $x_2 = \mu+\sigma$.