Esame di Stato di Liceo Scientifico

Corso sperimentale PNI

Sessione Ordinaria 2007

QUESTIONARIO

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Soluzione

<< Il problema della quadratura del cerchio>> rappresenta l'obiettivo di trasformare un cerchio in un quadrato avente la stessa area, ossia, in un quadrato equivalente. Il problema era nato dopo che era stato dimostrato che ogni poligono convesso di n (n>3) lati si può trasformare in un poligono equiesteso avente (n-1) lati. Iterando il procedimento si può trasformare un poligono convesso di n lati in un triangolo equiesteso. Poiché si dimostra anche che si può trasformare un triangolo in un parallelogramma equiesteso ed un parallelogramma in un rettangolo equiesteso ed infine (utilizzando i teoremi di Euclide) un rettangolo in un quadrato equiesteso, si ritenne che si potesse trasformare il cerchio di raggio r in un quadrato equiesteso. Purtroppo questa trasformazione non è possibile realizzarla con un processo composto da un numero finito di operazioni. E' necessario "passare al limite" per ottenere il cerchio come figura cui converge una successione di poligoni di n lati, con $n\to+\infty$.

Sulla questione non riteniamo di doverci soffermare ulteriormente. Si trova molta informazione sui normali testi scolastici di geometria elementare.

---

2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione y=lnx e l'asse x, con $1\le x\le e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

Soluzione

Rappresentiamo in Fig.1 il diagramma della funzione in questione. Osserviamo che sezionando il solido S con un piano perpendicolare all'asse delle x, con $1\le x\le e$, il rettangolo sezione ha area pari a

$$A(x) = base\cdot altezza = \ln x\cdot 3\ln x = 3\ln^2 x$$

Il valore del volume V del solido si ottiene con un processo di integrazione definita ed è il valore del seguente integrale

$$V(S) = \int_{x=1}^{e} A(x)dx = \int_{x=1}^{e} 3\ln^2 x\,dx$$

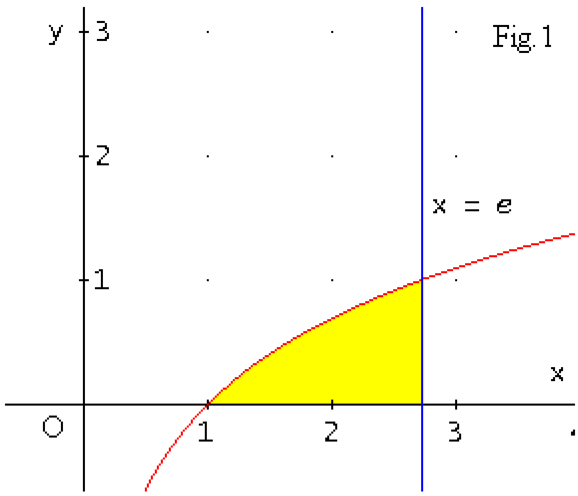

Fig. 1

Per il calcolo dell'integrale è necessario ricorrere al metodo di integrazione per parti. Si ha

$$\int 3\ln^2 x\,dx = 3\int D(x)\cdot \ln^2 x\,dx =$$

$$3\left[x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\right] =$$

$$3x\ln^2 x - 6\int \ln x\,dx = \quad 3x\ln^2 x - 6\left[x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right] = 3x\ln^2 x - 6x\ln x + 6x + C$$

essendo C una qualsiasi costante additiva.

Calcolo dell'integrale definito

$$V(S) = \left[3x\ln^2 x - 6x\ln x + 6x\right]_1^e = \; 3(e-2) \approx 2{,}154845..$$

Poiché si richiede un valore approssimato a meno di 0,01 la risposta è $V(S) = 2{,}15$.