

Esame di Stato di Liceo Scientifico

Corso sperimentale PNI

Sessione Ordinaria 2007

Problema 2

Si considerino i triangoli la cui base è $AB=1$ ed il cui vertice C varia in modo che l'angolo \widehat{CAB} si mantenga doppio dell'angolo \widehat{ABC} .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C .
2. Si rappresenti γ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'angolo \widehat{ABC} che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $\widehat{ABC} = 36^\circ$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Soluzione

1. Facciamo riferimento alla figura Fig.1 nella quale è evidente che è stato scelto un sistema di coordinate cartesiane con l'asse delle ascisse contenente il lato AB del triangolo, l'origine degli assi coincidente con il vertice A , $x_B=1$ ed il vertice C nel semipiano delle ordinate positive.

Nella figura abbiamo indicato con α l'ampiezza dell'angolo \widehat{CAB} , con β quella dell'angolo \widehat{ABC} e conseguentemente, dalle indicazioni del testo, risulta $\alpha=2\beta$.

Occorre ora determinare le coordinate cartesiane del vertice C . Osserviamo che risulta

$$x_C = AC \cdot \cos \alpha \quad \text{e} \quad y_C = AC \cdot \sin \alpha.$$

Per legare le coordinate del punto al triangolo utilizzeremo il teorema dei seni applicato allo stesso triangolo. Osserviamo prima che $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ e poiché $\alpha=2\beta$ si ha

$$\gamma = 180^\circ - 3\beta.$$

Dal teorema dei seni si ha

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha} \rightarrow AC = \frac{AB}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta = \frac{1}{\sin(180^\circ - 3\beta)} \cdot \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\sin 3\beta}$$

Le coordinate cartesiane del vertice C sono dunque

$$x = AC \cdot \cos \alpha = \frac{\sin \beta}{\sin 3\beta} \cdot \cos \alpha; \quad y = AC \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \beta}{\sin 3\beta} \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

Variabilità dell'ampiezza dell'angolo β e posizioni ammesse per il vertice C

Nella figura abbiamo tracciato l'asse del segmento AB . Osserviamo che preso un punto qualsiasi P su detto asse il triangolo ABP è isoscele su AB e quindi gli angoli \widehat{PAB} , \widehat{PBA} sono congruenti. Immaginando di tracciare per P la retta s parallela al segmento AB , scegliendo un punto Q su s nel semipiano avente come bordo l'asse MP e contenente il

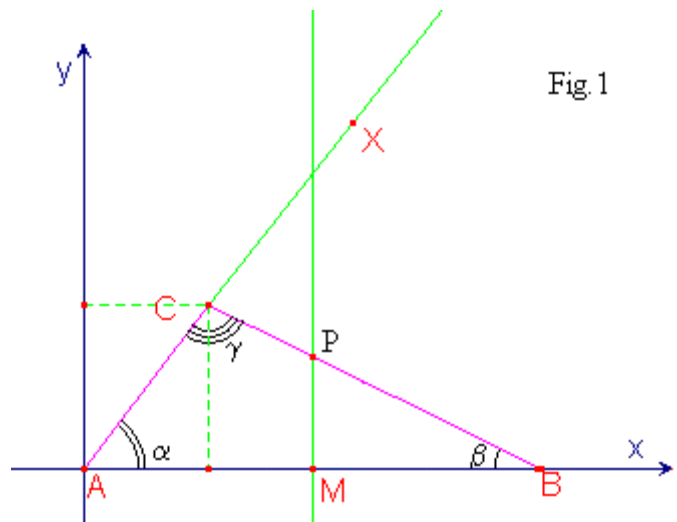


Fig. 1

punto A, si riconosce che il triangolo QAB, avendo $AQ < BQ$ ⁽¹⁾, avrà anche gli angoli opposti disuguali con la disuguaglianza nello stesso verso (in un triangolo al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore): $\widehat{ABQ} < \widehat{BAQ}$. Queste considerazioni permettono di affermare che il vertice C del triangolo ABC, dovendo essere soddisfatta la disuguaglianza $\widehat{CAB} > \widehat{CBA}$, dedotta dalla condizione $\widehat{CAB} = 2\widehat{CBA}$, dovrà appartenere al semipiano determinato dal suddetto asse per M e contenente il vertice A. Quindi l'ascissa del punto C deve verificare la condizione $x_c < \frac{AB}{2}$, cioè $x_c < \frac{1}{2}$.

Per quanto concerne l'ampiezza dell'angolo β , si osserva che in un triangolo la somma di due angoli è minore di 180° , se il triangolo non deve degenerare, e pertanto dovrà risultare senz'altro $0^\circ < 3\beta < 180^\circ$, dunque $0^\circ < \beta < 60^\circ$. Se vogliamo considerare le posizioni di C che portano il triangolo a degenerare possiamo imporre la doppia condizione $0^\circ \leq \beta \leq 60^\circ$. Con la limitazione superiore si deduce per l'angolo α la limitazione $0^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$. Il punto C potrà avvicinarsi alla retta passante per l'origine degli assi e formante un angolo di 120° con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Ricerca dell'equazione cartesiana del luogo geometrico γ descritto da C.

Mettiamo a sistema le espressioni (1) delle coordinate cartesiane, dopo aver posto $\alpha = 2\beta$

$$\begin{cases} x = \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}3\beta} \cdot \cos 2\beta \\ y = \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}3\beta} \cdot \text{sen}2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}(2\beta + \beta)} \cdot \cos 2\beta \\ \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}2\beta}{\cos 2\beta} \end{cases}$$

Elaboriamo l'espressione dell'ascissa nell'ipotesi che risulti $0^\circ < \beta < 60^\circ$

$$x = \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}(2\beta + \beta)} \cdot \cos 2\beta = \frac{\text{sen}\beta \cdot \cos 2\beta}{\text{sen}2\beta \cdot \cos \beta + \cos 2\beta \cdot \text{sen}\beta} = \frac{\text{sen}\beta \cdot \cos 2\beta}{2 \text{sen}\beta \cdot \cos^2 \beta + \cos 2\beta \cdot \text{sen}\beta} = \frac{\cos 2\beta}{2 \cos^2 \beta + \cos 2\beta} = \frac{2 \cos^2 \beta - 1}{2 \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \beta - 1} = \frac{2 \cos^2 \beta - 1}{4 \cos^2 \beta - 1}$$

Dall'ultima espressione ottenuta si determina $\cos^2 \beta$ in funzione di x .

$$\frac{2 \cos^2 \beta - 1}{4 \cos^2 \beta - 1} = x \rightarrow 2 \cos^2 \beta - 1 = 4 \cos^2 \beta \cdot x - x \rightarrow (2 - 4x) \cos^2 \beta = 1 - x \rightarrow \cos^2 \beta = \frac{1 - x}{2 - 4x}$$

con $x \neq \frac{1}{2}$, condizione già precisata. Osserviamo anche che per i valori indicati per β risulta

$$\text{positivo } \cos \beta \text{ per cui si ha anche } \cos \beta = \sqrt{\frac{1 - x}{2 - 4x}}.$$

Elaborando ora l'espressione del rapporto y/x otteniamo

⁽¹⁾ Si osservi che detto D il punto in cui il segmento DB incontra l'asse di AB, risulta $AD = DB$ e quindi anche $QB = QD + DB$. D'altra parte, dal triangolo AQD, poiché un lato è minore della somma degli altri due, si deduce la disuguaglianza $AQ < AD + DQ$. In definitiva possiamo scrivere $AQ < AD + DQ = DB + DQ = QB$. Pertanto nel triangolo AQB l'angolo opposto ad AQ è minore dell'angolo opposto a QB.

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2\sin\beta \cos\beta}{2\cos^2\beta - 1} = \frac{2\sqrt{1-\cos^2\beta} \cdot \cos\beta}{2\cos^2\beta - 1} = \frac{2\sqrt{1-\frac{1-x}{2-4x}} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2-4x}}}{2 \cdot \frac{1-x}{2-4x} - 1} =$$

$$\frac{2\sqrt{\frac{1-3x}{2-4x}} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2-4x}}}{\frac{1-x}{1-2x} - 1};$$

a questo punto, notiamo che per l'esistenza della funzione, dalla condizione $x_c < \frac{1}{2}$, la

richiesta $\frac{1-3x}{2-4x} \geq 0$ implica che deve risultare addirittura $x \leq \frac{1}{3}$.

Con questa limitazione elaboriamo ulteriormente la frazione algebrica:

$$\frac{y}{x} = \frac{2 \cdot \sqrt{(1-3x)(1-x)}}{2-4x} = \frac{\sqrt{(1-3x)(1-x)}}{1-2x} \cdot \frac{1-2x}{x}$$

da cui, con $x \neq 0$, si ricava $y = \sqrt{(1-3x)(1-x)}$.

Osservazione

La funzione ottenuta va studiata solo per $x \leq \frac{1}{3}$.

Discussione del **caso particolare per il valore $x=0$** .

Precisiamo che la condizione algebrica $x \neq 0$ non è stata dedotta da alcuna limitazione geometrica; è semplicemente una conseguenza del fatto che si è considerato il rapporto y/x per procedere con le elaborazioni algebriche. Dunque non è una limitazione sostanziale.

Per questo valore il punto C si trova sull'asse delle ordinate. Il triangolo ABC diventa rettangolo in A. Calcolando il valore dell'ordinata risulta $y=1$, quindi $AC=AB \Rightarrow$ il triangolo ABC è rettangolo isoscele e come si vede l'angolo nel vertice A è doppio di quello nel vertice B. La posizione del vertice C(0;1) è perciò ammissibile.

2. Cenni allo studio della funzione

- Dominio: $A = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right]$
- Positività: la funzione si annulla solo per $x=1/3$; per il resto è positiva.
- Limite per $x \rightarrow -\infty$ e ricerca di eventuali asintoti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(1-3x)(1-x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 3\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = +\infty$$

Conclusione: Il diagramma non ammette asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$

Ricerca dell'eventuale asintoto obliquo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 3\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = -\sqrt{3} \rightarrow m = -\sqrt{3};$$

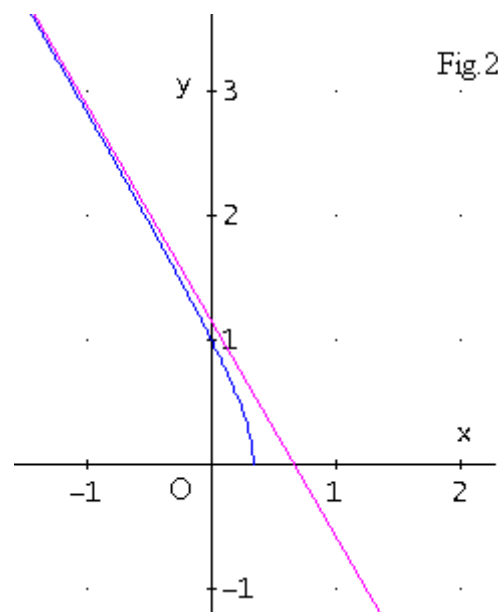


Fig.2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(1-3x)(1-x)} + \sqrt{3}x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 - 4x + 1})^2 - (\sqrt{3}x)^2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - \sqrt{3}x} = \dots = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow$$

la retta $s: y = -\sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

- Monotonia, massimi e minimi

$$y' = \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} < 0, \text{ per ogni } x \text{ del dominio, quindi la funzione è strettamente}$$

decrescente in tutto il dominio ed assume il suo minimo assoluto per $x=1/3$ ed il valore è zero.

Il diagramma della funzione è riportato in Fig.2

3. Tracciamo le altezze AK, BH e determiniamo le loro misure in funzione dell'angolo β . Si ha $AK=AB\text{sen}\beta=\text{sen}\beta$; $BH=AB\text{sen}\alpha=\text{sen}2\beta$.

La somma dei quadrati delle misure delle altezze è $\varphi(\beta) = \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2 2\beta = \text{sen}^2\beta + 4\text{sen}^2\beta \cos^2\beta = \text{sen}^2\beta \cdot (1 + 4\cos^2\beta)$

Si tratta di determinare il massimo di questa funzione con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}$.

Determiniamo la derivata prima:

$$\varphi'(\beta) =$$

$$2\text{sen}\beta \cos\beta \cdot (1 + 4\cos^2\beta) + \text{sen}^2\beta \cdot 8\cos\beta \cdot (-\text{sen}\beta) = \dots = 2\text{sen}\beta \cos\beta \cdot (4\cos 2\beta + 1)$$

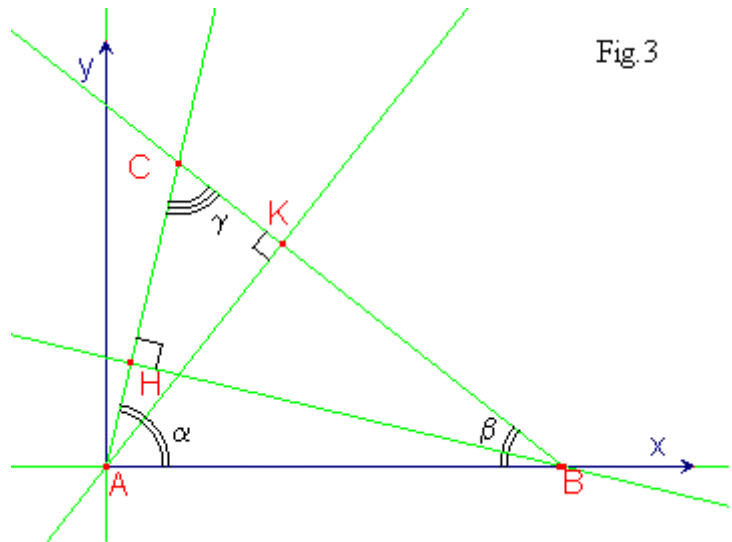
Si osserva che limitatamente al dominio di variabilità di β la deriva rima si annulla:

- se $\text{sen}\beta=0$, quindi con $\beta=0$. Per questo valore si ha $\varphi(\beta) = 0$, che è il valore minimo assoluto;
- se risulta $4\cos 2\beta + 1 = 0$, quindi se $\cos 2\beta = -\frac{1}{4}$. Dunque deve essere

$$\beta = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 52^\circ 14' 20".$$

Facciamo notare che per i valori del dominio di β risulta $\text{sen}\beta$ non negativo, $\cos\beta$ positivo, e dunque il segno della derivata prima dipende da quello del fattore $(4\cos 2\beta + 1)$. Poiché con $0 \leq \beta < 52^\circ 14' 20"$ risulta $(4\cos 2\beta + 1) > 0$ e con $52^\circ 14' 20" < \beta \leq 60^\circ$ risulta $(4\cos 2\beta + 1) < 0$, si conclude

che $\beta = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ è punto di massimo relativo proprio, nonché assoluto per la funzione. Pertanto $\beta \approx 52^\circ 14' 20"$ è l'ampiezza per la quale la somma in oggetto è massima.



Valore del massimo

Con $\bar{\beta} = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$, quindi con $\cos 2\bar{\beta} = -\frac{1}{4}$, poiché si può scrivere

$$\varphi(\beta) = \operatorname{sen}^2 \beta \cdot (1 + 4 \cos^2 \beta) = \frac{1 - \cos 2\beta}{2} \cdot \left[1 + 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \right] =$$
$$\frac{1 - \cos 2\beta}{2} \cdot (3 + 2 \cos 2\beta)$$

segue che

$$\operatorname{Max} = \varphi(\bar{\beta}) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right] \left[3 + 2 \left(-\frac{1}{4}\right) \right] = \frac{25}{16}$$

4. Facciamo notare che se $\beta = 36^\circ$ allora $\alpha = 2\beta = 72^\circ$ e $\gamma = 72^\circ$ e conseguentemente il triangolo ABC è isoscele su AC. Si tratta di un triangolo particolare. Infatti, in tutti i triangoli isosceli che hanno l'angolo nel vertice comune ai due lati congruenti di ampiezza 36° “la base è la sezione aurea del lato”. Dunque AC è la sezione aurea⁽²⁾ di AB. Pertanto la

$$\text{misura di AC è } AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Osservazione- Se il candidato avesse ricordato che $\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, notando che risulta

$$AC = \frac{AB}{\operatorname{sen} \gamma} \cdot \operatorname{sen} \beta = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} 3\beta} = \dots = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \beta (3 - 4 \operatorname{sen}^2 \beta)} = \frac{1}{3 - 4 \operatorname{sen}^2 \beta}$$

avrebbe potuto eseguire i calcoli necessari e giungere al risultato.

Questo procedimento è senza dubbio più laborioso del precedente, anche se c'è da ricordare che il valore di $\operatorname{sen} 18^\circ$ viene dedotto proprio dalla proprietà della sezione aurea di un segmento, precisamente, dal fatto che il lato del decagono regolare inscritto in una

circonferenza è la sezione aurea del raggio della stessa: $l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$. Facendo riferimento

ad una circonferenza con raggio unitario si ricava che $\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{l_{10}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

⁽²⁾ Ricordiamo che la **sezione aurea di un segmento** è la parte del segmento che risulta media proporzionale tra il segmento stesso e la parte rimanente. Indicando con l la misura del segmento ed x la misura della sezione aurea dello stesso sussiste la seguente proporzione $l : x = x : (l - x)$ dalla quale si ottiene l'equazione $x^2 + lx - l^2 = 0$, le cui

radici sono $x_1 = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$, $x_2 = -\frac{l(\sqrt{5}+1)}{2}$. Il valore positivo x_1 è la misura della sezione aurea.