Esame di Stato di Liceo Scientifico

Corso sperimentale PNI

Sessione Ordinaria 2007

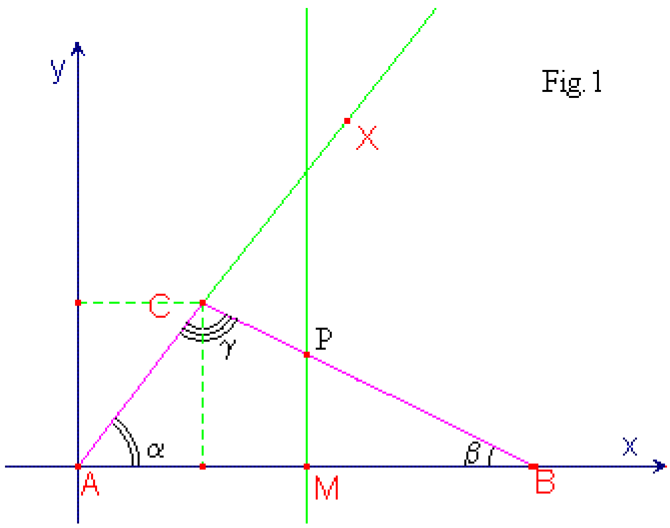
Problema 2

Si considerino i triangoli la cui base è AB=1 ed il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C$ =36° allora è $AC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Soluzione

1. Facciamo riferimento alla figura Fg.1 nella quale è evidente che è stato scelto un sistema di coordinate cartesiane con l'asse delle ascisse contenente il lato AB del triangolo, l'origine degli assi coincidente con il vertice A, x_B=1 ed il vertice C nel semipiano delle ordinate positive.



Nella figura abbiamo indicato con α l'ampiezza dell'angolo $C\hat{A}B$, con β quella dell'angolo $A\hat{B}C$ e conseguentemente, dalle indicazioni del testo, risulta α=2β.
Occorre ora determinare le coordinate cartesiane del vertice C. Osserviamo che risulta
$x_C = AC\cdot\cos\alpha$ e $y_C = AC\cdot sen\alpha$.
Per legare le coordinate del punto al triangolo utilizzeremo il teorema dei seni applicato allo stesso triangolo. Osserviamo prima che $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$ e poiché α=2β si ha $\gamma=180°-3\beta$.
Dal teorema dei seni si ha

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{sen}\beta}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{sen}\gamma}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{sen}\alpha}\rightarrow AC=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{sen}\gamma}\cdot sen\beta=\frac{1}{sen(180°-3\beta)}\cdot sen\beta=\frac{sen\beta}{sen3\beta}$$

Le coordinate cartesiane del vertice C sono dunque

$$x=AC\cdot\cos\alpha=\frac{sen\beta}{sen3\beta}\cdot\cos\alpha\,;\qquad y=AC\cdot sen\alpha=\frac{sen\beta}{sen3\beta}\cdot sen\alpha\qquad(1)$$

Variabilità dell'ampiezza dell'angolo β e posizioni ammesse per il vertice C

Nella figura abbiamo tracciato l'asse del segmento AB. Osserviamo che preso un punto qualsiasi P su detto asse il triangolo ABP è isoscele su AB e quindi gli angoli $P\hat{A}B$, $P\hat{B}A$ sono congruenti. Immaginando di tracciare per P la retta s parallela al segmento AB, scegliendo un punto Q su s nel semipiano avente come bordo l'asse MP e contenente il punto A, si riconosce che il triangolo QAB avendo AQ<BQ avrà anche gli angoli opposti

disuguali con la disuguaglianza nello stesso verso (in un triangolo al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore): $ABQ < BAQ$. Queste considerazioni permettono di affermare che il vertice C del triangolo ABC, dovendo essere soddisfatta la disuguaglianza $CAB = 2CBA$, quindi $CAB > CBA$, dovrà appartenere al semipiano determinato dal suddetto asse per M e contenente il vertice A. Quindi l'ascissa del punto C deve verificare la condizione $x_C < \frac{AB}{2}$, cioè $x_C < \frac{1}{2}$.
Per quanto concerne l'ampiezza dell'angolo β, si osserva che in un triangolo la somma di due angoli è minore di 180°, se il triangolo non deve degenerare, e pertanto dovrà risultare senz'altro 0°<3β<180°, dunque 0°<β<60°. Se vogliamo considerare le posizioni di C che portano il triangolo a degenerare possiamo imporre la doppia condizione 0°≤β≤60°. Con la limitazione superiore si deduce per l'angolo α la limitazione 0°≤α≤120°. Il punto C potrà avvicinarsi alla retta passante per l'origine degli assi e formante un angolo di 120° con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Ricerca dell'equazione cartesiana del luogo geometrico γ descritto da C.

Mettiamo a sistema le espressioni (1) delle coordinate cartesiane, dopo aver posto α=2β

$$\begin{cases} x = \dfrac{sen\beta}{sen3\beta}\cdot\cos 2\beta \\ y = \dfrac{sen\beta}{sen3\beta}\cdot sen2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{sen\beta}{sen(2\beta+\beta)}\cdot\cos 2\beta \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{sen2\beta}{\cos 2\beta} \end{cases}$$

Elaboriamo l'espressione dell'ascissa nell'ipotesi che risulti 0°<β<60°

$$x = \frac{sen\beta}{sen(2\beta+\beta)}\cdot\cos 2\beta = \frac{sen\beta\cdot\cos 2\beta}{sen2\beta\cdot\cos\beta+\cos 2\beta\cdot sen\beta} =$$

$$\frac{\cancel{sen\beta}\cdot\cos 2\beta}{2\,\cancel{sen\beta}\cdot\cos^2\beta+\cos 2\beta\cdot\cancel{sen\beta}} = \frac{\cos 2\beta}{2\cos^2\beta+\cos 2\beta} = \frac{2\cos^2\beta-1}{2\cos^2\beta+2\cos^2\beta-1} = \frac{2\cos^2\beta-1}{4\cos^2\beta-1}$$

Dall'ultima espressione ottenuta si determina $\cos^2\beta$ in funzione di *x*.

$$\frac{2\cos^2\beta-1}{4\cos^2\beta-1} = x \rightarrow 2\cos^2\beta-1 = 4\cos^2\beta\cdot x - x \rightarrow (2-4x)\cos^2\beta = 1-x \rightarrow \cos^2\beta = \frac{1-x}{2-4x}$$

con $x \neq \frac{1}{2}$, condizione già precisata. Osserviamo anche che per i valori indicati per β risulta positivo cosβ per cui si ha anche $\cos\beta = \sqrt{\frac{1-x}{2-4x}}$.

Elaborando ora l'espressione del rapporto y/x otteniamo

$$\frac{y}{x} = \frac{sen2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2sen\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta-1} = \frac{2\sqrt{1-\cos^2\beta}\cdot\cos\beta}{2\cos^2\beta-1} = \frac{2\sqrt{1-\frac{1-x}{2-4x}}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{2-4x}}}{2\cdot\frac{1-x}{2-4x}-1} =$$

$$\frac{2\sqrt{\frac{1-3x}{2-4x}}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{2-4x}}}{\frac{1-x}{1-2x}-1};$$

a questo punto, notiamo che per l'esistenza della funzione, dalla condizione $x_C < \frac{1}{2}$, la richiesta $\frac{1-3x}{2-4x} \geq 0$ implica che deve risultare addirittura $x \leq \frac{1}{3}$.
Con questa limitazione elaboriamo ulteriormente la frazione algebrica:

$$\frac{y}{x} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{(1-3x)(1-x)}}{2-4x}}{\frac{1-x-1+2x}{1-2x}} = \frac{\sqrt{(1-3x)(1-x)}}{1-2x} \cdot \frac{1-2x}{x}$$

da cui, con $x \neq 0$, si ricava $y = \sqrt{(1-3x)(1-x)}$.

Osservazione

La funzione ottenuta va studiata solo per $x \leq \frac{1}{3}$.

Discussione del **caso particolare per il valore *x*=0**.
Precisiamo che la condizione algebrica $x \neq 0$ non è stata dedotta da alcuna limitazione geometrica; è semplicemente una conseguenza del fatto che si è considerato il rapporto y/x per procedere con le elaborazioni algebriche. Dunque, non è una limitazione sostanziale. Per questo valore il punto C si trova sull'asse delle ordinate. Il triangolo ABC diventa rettangolo in A. Calcolando il valore dell'ordinata risulta y=1, quindi AC=AB $\Rightarrow$ il triangolo ABC è rettangolo isoscele e come si vede l'angolo nel vertice A è doppio di quello nel vertice B. La posizione del vertice C(0;1) è perciò ammissibile.

2. **Cenni allo studio della funzione**

- Dominio: $A = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$
- Positività: la funzione si annulla solo per $x=1/3$; per il resto è positiva.
- Limite per $x \to -\infty$ e ricerca di eventuali asintoti

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{(1-3x)(1-x)} = \lim_{x\to-\infty} |x| \sqrt{\left(\frac{1}{x}-3\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)} = +\infty$$

Conclusione: Il diagramma non ammette asintoto orizzontale per $x \to -\infty$
Ricerca dell'eventuale asintoto obliquo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\left(\frac{1}{x}-3\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)} = -\sqrt{3} \to$$

$$m = -\sqrt{3};$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{(1-3x)(1-x)} + \sqrt{3}x =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2-4x+1} + \sqrt{3}x =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2-4x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2}{\sqrt{3x^2-4x+1} - \sqrt{3}x} = \ldots = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\to$

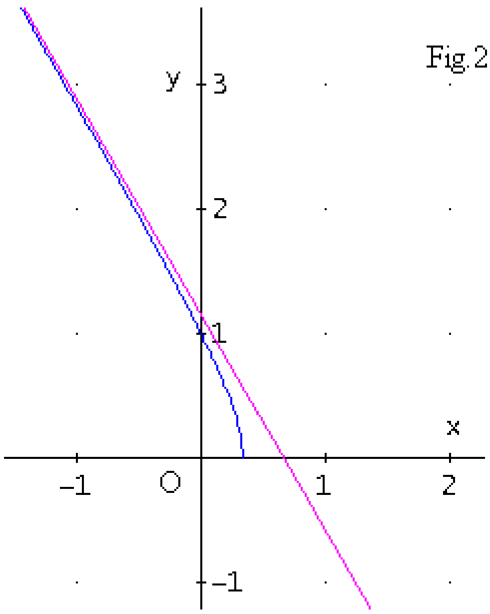


Fig.2

la retta $s: y = -\sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

- Monotonia, massimi e minimi

$y' = \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} < 0$, per ogni x del dominio, quindi la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio ed assume il suo minimo assoluto per $x=1/3$ ed il valore è zero.
Il diagramma della funzione è riportato in Fig.2

3. Tracciamo le altezze AK, BH e determiniamo le loro misure in funzione dell'angolo β. Si ha AK=ABsenβ=senβ; BH=ABsenα=sen2β.

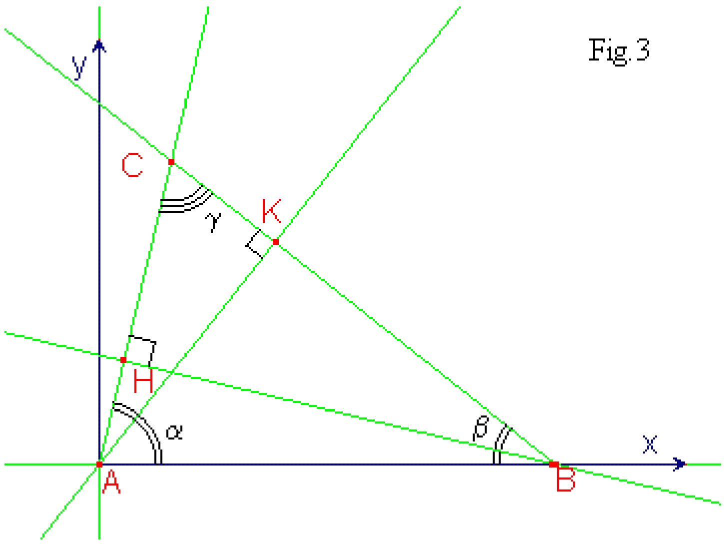


Fig.3

La somma dei quadrati delle misure delle altezze è

$\varphi(\beta) = sen^2\beta + sen^2 2\beta =$

$sen^2\beta + 4sen^2\beta\cos^2\beta =$

$sen^2\beta \cdot (1 + 4\cos^2\beta)$

Si tratta di determinare il massimo di questa funzione con $0 \le \beta \le \frac{\pi}{3}$.

Determiniamo la derivata prima:

$\varphi'(\beta) =$

$2sen\beta\cos\beta \cdot (1 + 4\cos^2\beta) + sen^2\beta \cdot 8\cos\beta \cdot (-sen\beta) = \ldots = 2sen\beta\cos\beta \cdot (4\cos 2\beta + 1)$

Si osserva che limitatamente al dominio di variabilità di β la deriva rima si annulla:

- se senβ=0, quindi con β=0. Per questo valore si ha $\varphi(\beta) = 0$, che è il valore minimo assoluto;
- se risulta $4\cos 2\beta + 1 = 0$, quindi se $\cos 2\beta = -\frac{1}{4}$. Dunque, deve essere $\beta = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 52°14'20"$. Facciamo notare che per i valori del dominio di β risulta senβ non negativo, cosβ positivo, e dunque il segno della derivata prima dipende da quello del fattore $(4\cos 2\beta + 1)$. Poiché con $0 \le \beta < 52°14'20"$ risulta $(4\cos 2\beta + 1) > 0$ e con $52°14'20" < \beta \le 60°$ risulta $(4\cos 2\beta + 1) < 0$, si conclude che $\beta = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ è punto di massimo relativo proprio, nonché assoluto per la funzione. Pertanto, $\beta \approx 52°14'20"$ è l'ampiezza per la quale la somma in oggetto è massima.

Valore del massimo

Con $\overline{\beta} = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$, quindi con $\cos 2\overline{\beta} = -\frac{1}{4}$, poiché si può scrivere

$$\varphi(\beta) = sen^2\beta \cdot \left(1 + 4\cos^2\beta\right) = \frac{1-\cos 2\beta}{2} \cdot \left[1 + 4 \cdot \frac{1+\cos 2\beta}{2}\right] =$$
$$\frac{1-\cos 2\beta}{2} \cdot \left(3 + 2\cos 2\beta\right)$$

segue che

$$Max = \varphi\left(\overline{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right]\left[3 + 2\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{25}{16}$$

4. Facciamo notare che se $\beta = 36°$ allora $\alpha = 2\beta = 72°$, $\gamma = 72°$ e conseguentemente il triangolo ABC è isoscele su AC. Si tratta di un triangolo particolare. Infatti, in tutti i triangoli isosceli che hanno l'angolo nel vertice comune ai due lati congruenti di ampiezza 36° "la base è la sezione aurea del lato". Dunque AC è la sezione aurea[1] di AB. Pertanto, la misura di AC è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

   Osservazione- Se il candidato avesse ricordato che $sen18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, notando che risulta

   $$AC = \frac{\text{AB}}{\text{sen}\gamma} \cdot sen\beta = \frac{1 \cdot sen\beta}{\text{sen}3\beta} = \ldots = \frac{sen\beta}{sen\beta\left(3 - 4sen^2\beta\right)} = \frac{1}{3 - 4sen^2\beta}$$

   avrebbe potuto eseguire i calcoli necessari e giungere al risultato.
   Questo procedimento è senza dubbio più laborioso del precedente, anche se c'è da ricordare che il valore di sen18° viene dedotto proprio dalla proprietà della sezione aurea di un segmento, precisamente, dal fatto che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio della stessa: $l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$. Facendo riferimento ad una circonferenza con raggio unitario si ricava che $sen18° = \frac{l_{10}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

---

[1] Ricordiamo che la **sezione aurea di un segmento** è la parte del segmento che risulta media proporzionale tra il segmento stesso e la parte rimanente. Indicando con ***l*** la misura del segmento ed *x* la misura della sezione aurea dello stesso sussiste la seguente proporzione $l : x = x : (l - x)$ dalla quale si ottiene l'equazione $x^2 + lx - l^2 = 0$, le cui radici sono $x_1 = \frac{l\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$, $x_2 = -\frac{l\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. Il valore positivo x_1 è la misura della sezione aurea.