Esame di Stato di Liceo Scientifico - Sessione Suppletiva del 2007

Problema1

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x)=\int_0^x\left(e^{3t}+2e^{2t}-3e^t\right)dt$$

1) Si studi la funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2) Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel suo punto di ascissa *ln*2.
3) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x=ln3$.
4) Tenuto conto che $ln2=\int_1^2\frac{1}{x}dx$ si calcoli un valore approssimato di ln2 utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Soluzione

1) La funzione in oggetto è definita su tutto l'asse reale. Infatti, la funzione integranda $g(t)=e^{3t}+2e^{2t}-3e^t$ è definita ed è continua per ogni t reale (nonché dotata di derivate di qualsiasi ordine) per cui esiste l'integrale definito della stessa esteso a qualsiasi intervallo [a;b].
   a. Determiniamo l'espressione della funzione f(x) calcolando l'integrale definito.

$$f(x)=\int_0^x\left(e^{3t}+2e^{2t}-3e^t\right)dt=\left[\frac{1}{3}e^{3t}+e^{2t}-3e^t\right]_0^x=\left(\frac{1}{3}e^{3x}+e^{2x}-3e^x\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=$$
$$\frac{1}{3}e^{3x}+e^{2x}-3e^x+\frac{5}{3}.$$

   b. Segno e zeri.

Dalla definizione della funzione emerge immediatamente che f(0)=0. Per stabilire se esistono altri zeri si deve risolvere l'equazione

$\frac{1}{3}e^{3x}+e^{2x}-3e^x+\frac{5}{3}=0$ che si trasforma nell'equivalente

$e^{3x}+3e^{2x}-9e^x+5=0$ (*).

Poniamo e^x=y passando all'equazione $y^3+3y^2-9y+5=0$. Quest'equazione ammette come soluzione y=1 (perché dalla soluzione nota x=0 si ricava $y=e^0=1$) e quindi si può scomporre in fattori il polinomio al primo membro eseguendo la divisione

$\left(y^3+3y^2-9y+5\right):\left(y-1\right)$; si ottiene la fattorizzazione

$y^3+3y^2-9y+5=(y-1)\left(y^2+4y-5\right)$ e dunque le altre radici si ottengono risolvendo l'equazione di secondo grado

$y^2+4y-5=0$, soddisfatta da $y_1=-5$ e $y_2=1$. Tornando alla variabile x si riconosce che da $y_1=-5$ si ottiene l'equazione $e^x=-5$, che non ammette soluzioni reali e che da $e^x=1$ si ottiene ancora x=0. Pertanto l'equazione (*) ammette x=0 come soluzione doppia e non ha altre soluzioni reali. Si conclude che la funzione ammette solo uno zero:x=0.

Dalle informazioni sugli zeri della funzione, sfruttando la teoria sulla scomposizione in fattori di un polinomio, riconosciamo che la funzione può essere posta nella seguente forma

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-1\right)^2\left(e^x+5\right)$$

dalla quale si riconosce che per ogni x≠0 risulta f(x)>0. Avendo precisato che f(0)=0 possiamo a questo punto già affermare che in x=0 la funzione assume il suo valore minimo assoluto.

c. Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\left(e^x-1\right)^2\left(e^x+5\right)=+\infty;$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}\left(e^x-1\right)^2\left(e^x+5\right)=\frac{1}{3}(0-1)^2(0+5)=\frac{5}{3}$; dunque la retta $y=\frac{5}{3}$ è asintoto orizzontale per x→-∞.

Osserviamo ancora che si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\left(e^x-1\right)^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+5}{x}\right)=+\infty\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+\frac{5}{x}\right)=$$

$$+\infty\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}\right)=+\infty\cdot\left(\left(H.\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}\right)+\frac{5}{+\infty}\right)=+\infty\cdot\left((+\infty)+0\right)=+\infty$$

e dunque per x→+∞ il diagramma della funzione non ammette asintoto obliquo.

d. Monotonia, massimi e minimi relativi o assoluti

Abbiamo già precisato che x=0 è punto di minimo assoluto. Analizziamo la funzione derivata prima per scoprire l'eventuale esistenza di altri punti estremanti della funzione.

$$f'(x)=e^{3x}+2e^{2x}-3e^x=e^x\left(e^{2x}+2e^x-3\right)$$

$f'(x)\geq 0$ se e solo se $e^{2x}+2e^x-3\geq 0$, che diventa $\left(e^x-1\right)\left(e^x+3\right)\geq 0$ dalla quale si deduce che:

$f'(x)=0$, solo per x=0; $f'(x)>0$ per ogni x>0; $f'(x)<0$ per ogni x<0. Pertanto la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo]-∞;0[, strettamente crescente nell'intervallo]0;+∞[ed ammette come unico punto estremante x=0. La funzione non ha altri punti di minimo o di massimo né relativi, né assoluti.

e. Concavità, convessità e flessi

La funzione derivata seconda è $f''(x)=3e^{3x}+4e^{2x}-3e^{x} = e^{x}\left(3e^{2x}+4e^{x}-3\right)$.

Poiché $3e^{2x}+4e^{x}-3\geq 0$ è equivalente alla seguente

$\left(e^{x}\leq -\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)\vee\left(e^{x}\geq \frac{\sqrt{13}-2}{3}\right)$, che a sua volta è equivalente alla seguente

$e^{x}\geq \frac{\sqrt{13}-2}{3}$, e quest'ultima è soddisfatta per $x\geq \log\left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right)$,

si conclude che la concavità del diagramma della funzione è rivolta verso il basso (funzione concava) per $x<\log\left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right)$ e volge la concavità verso l'alto (funzione convessa) per $x>\log\left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right)$; nel punto $x=\log\left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right)\approx -0,62515$ presenta un flesso ascendente a tangente obliqua.

2) Equazione della normale alla curva C in x=ln2

Il punto della curva avente ascissa x=ln(2) ha ordinata

$$f(\ln(2))=\frac{1}{3}\left(e^{\ln(2)}-1\right)^{2}\left(e^{\ln(2)}+5\right)=\frac{1}{3}\cdot(2-1)\cdot(2+5)=\frac{7}{3}.$$

Il punto è $A\left(\ln(2);\frac{7}{3}\right)$. Per definizione la normale in A alla curva C è la retta ortogonale nello stesso punto alla retta tangente alla curva in detto punto. Ricordiamo che la retta tangente al diagramma della funzione y=f(x) nel punto (x_0;f(x_0)) nell'ipotesi in cui la funzione sia derivabile in x_0 ha come coefficiente angolare il valore della derivata prima f′(x_0) ed è

$$t: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Se $f'(x_0)\neq 0$ l'equazione della normale al diagramma nello stesso punto è

$$n: y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Nel nostro caso $x_0=\ln(2)$ e si ha

$$f'(\ln(2)) = \left(e^{\ln(2)}\right)^3 + 2\left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 3\cdot e^{\ln(2)} = 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 = 10,$$

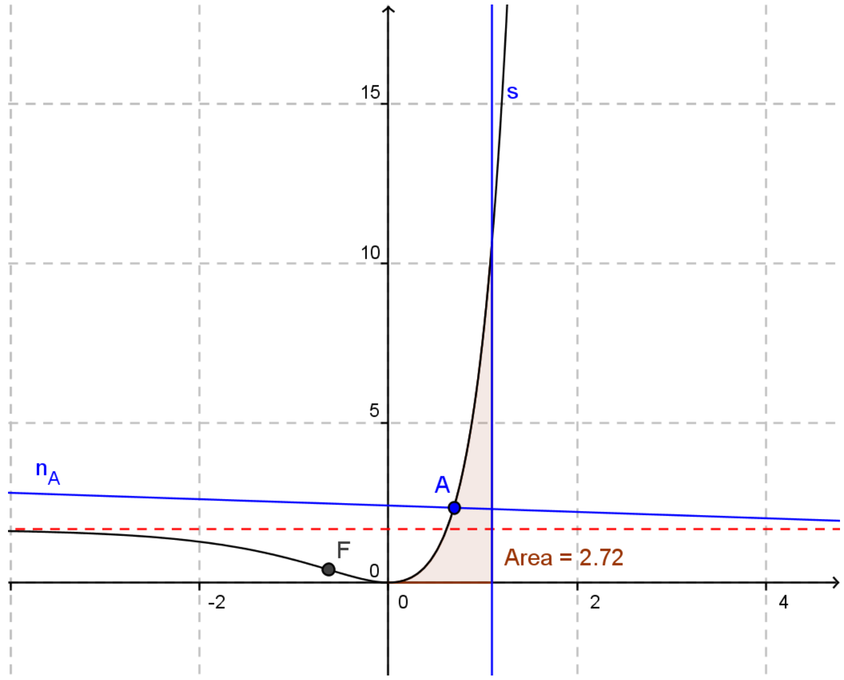
per cui l'equazione della normale in A è $n: y - \frac{7}{3} = -\frac{1}{10}\left(x - \ln(2)\right)$.

y=7/3-x*0.1+0.1*ln(2)

3) Area della regione piana

Area= $S = \int_0^{\ln(3)} f(x)\,dx = \int_0^{\ln(3)} \left(\frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{3}\right)dx = \left[\frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{3}x\right]_0^{\ln(3)} =$

$\frac{8}{9} + \frac{5}{3}ln(3)$



4) Si tralascia la risoluzione del quesito. Il lettore interessato può trovare altri lavori simili nella sezione Analisi del sito.