QUESTIONARIO

Quesito_3

3. In un piano sono dati una retta *r* e due punti A e B ad essa esterni ma situati nello stesso semipiano di origine *r*. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando *r*.

Soluzione

Del quesito forniremo due soluzioni. Nella prima si dimostra la tesi sfruttando alcune proprietà di figure geometriche, nella seconda si utilizzerà il metodo dell'analisi matematica.

Prima soluzione (geometria sintetica)

Facciamo riferimento alla figura Fig.3.1

Consideriamo la retta *r* e siano A e B i due punti esterni ad essa e contenuti nello stesso semipiano di origine *r*. Costruiamo il punto A′, simmetrico di A rispetto ad *r*, e sia I il punto di intersezione del segmento A′B con la retta *r*.

Vogliamo dimostrare che il percorso più breve che unisce A con B e che tocchi la retta *r* è rappresentato dalla linea spezzata AIB.

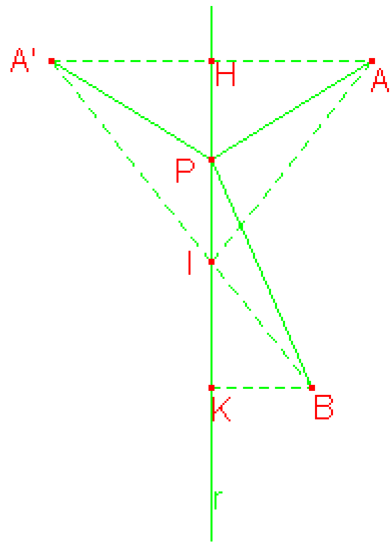

Fig.3.1

Dimostrazione

Siano H e K le proiezioni ortogonali di A e B su *r* e P un punto qualsiasi del segmento HK diverso dal punto I. Uniamo P con A, A′ e B. Notiamo che la retta *r* è asse del segmento AA′, quindi AP≅A′P. Ricordando che in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, in riferimento al triangolo A′PB possiamo scrivere la disuguaglianza

$$A'B < A'P + PB$$

Osserviamo ora che risulta anche AI≅A′I e A′B= A′I+IB, dunque possiamo scrivere

AI+IB= A′I+IB< A′P+PB=AP+PB.

La tesi è acquisita con P punto compreso tra H e K.

Il lettore osservi che la dimostrazione è valida anche se P coincide con H o con K.

Lasciamo al lettore il compito di dimostrare che se si sceglie su *r* un punto P esterno al segmento HK la somma AP+PB è ancora maggiore di AI+IB e dunque effettivamente il percorso minimo è rappresentato dalla spezzata AIB.

Seconda soluzione (metodo analitico)

Per questa dimostrazione facciamo riferimento alla figura Fig.3.2 nella quale abbiamo posto:

$\overline{HK} = l$, $\overline{HP} = x \Rightarrow \overline{PK} = l - x$, con le limitazioni $0 \le x \le l$;

per le distanze dei punti A e B dalla retta *r* poniamo inoltre

$\overline{AH} = d_1$, $\overline{BK} = d_2$.

Occorre determinare la misura della lunghezza della spezzata APB in funzione della variabile x (ed ovviamente del parametro l) e studiare per quale posizione di P la suddetta misura assume il valore minimo.

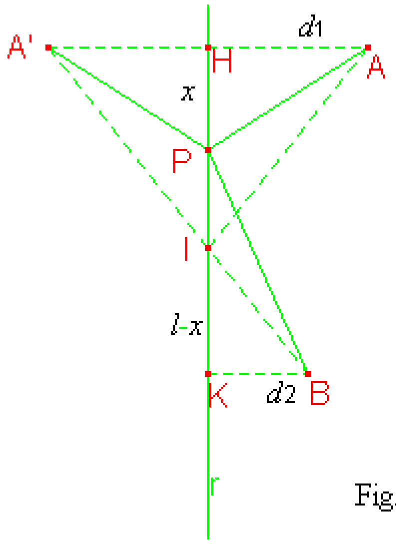

Fig.3.2

Calcolo delle misure $\overline{AP}$, $\overline{PB}$.

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli AHP, PKB si ha

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HP}^2} = \sqrt{d_1^{\,2} + x^2},$$

$$\overline{PB} = \sqrt{\overline{PK}^2 + \overline{KB}^2} = \sqrt{(l-x)^2 + d_2^{\,2}}$$

La funzione che esprime la misura della spezzata APB è

$$f(x) = \overline{AP} + \overline{PB} = \sqrt{d_1^{\,2} + x^2} + \sqrt{(l-x)^2 + d_2^{\,2}}$$

per la quale occorre stabilire per quale valore di x assume il minimo, con $x \in [0;l]$.

Facciamo notare che la funzione in esame è somma di due funzioni continue e derivabili nel dominio assegnato, quindi per il teorema di Weierstrass possiamo affermare che ammetterà minimo e massimo assoluti. Per determinare il minimo assoluto si deve studiare il segno della derivata prima e gli eventuali suoi zeri per stabilire se esistano punti di massimo e di minimo relativi internamente all'intervallo, successivamente si dovranno determinare i valori della funzione agli estremi dell'intervallo di definizione e confrontarli con i minimi relativi per determinarne il minimo assoluto.

Derivata prima

$$f\,'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{d_1^{\,2}+x^2}} + \frac{\cancel{2}(l-x)(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(l-x)^2+d_2^{\,2}}} = \frac{x}{\sqrt{d_1^{\,2}+x^2}} - \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+d_2^{\,2}}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{(l-x)^2+d_2^{\,2}} \geq (l-x)\sqrt{d_1^{\,2}+x^2} \Leftrightarrow x^2\left[(l-x)^2+d_2^{\,2}\right] \geq (l-x)^2\left(d_1^{\,2}+x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2(l-x)^2} + x^2 d_2^{\,2} \geq (l-x)^2 d_1^{\,2} + \cancel{x^2(l-x)^2} \Leftrightarrow \quad x^2 d_2^{\,2} \geq (l-x)^2 d_1^{\,2} \Leftrightarrow$$ (per le limitazioni imposte alla variabile) $xd_2 \geq (l-x)d_1$ e quindi per $x \geq \frac{ld_1}{d_1+d_2}$.

Deduciamo che nell'intervallo $\left]0;\frac{ld_1}{d_1+d_2}\right[$ la derivata prima è negativa, quindi la funzione $f(x)$ è strettamente decrescente; nell'intervallo $\left]\frac{ld_1}{d_1+d_2};l\right[$ la derivata prima è positiva e dunque la funzione $f(x)$ è strettamente crescente; ne segue che nel punto $x = \frac{ld_1}{d_1+d_2}$ la funzione ammette un minimo relativo proprio il cui valore è

$$\min = f\left(\frac{ld_1}{d_1+d_2}\right) = \sqrt{d_1^2+\left(\frac{ld_1}{d_1+d_2}\right)^2}+\sqrt{\left(l-\frac{ld_1}{d_1+d_2}\right)^2+d_2^2}$$
$$=\frac{d_1}{d_1+d_2}\sqrt{(d_1+d_2)^2+l^2}+\frac{d_2}{d_1+d_2}\sqrt{(d_1+d_2)^2+l^2} = \sqrt{(d_1+d_2)^2+l^2}$$

Osservazione

Poiché all'interno dell'intervallo [0;l] la funzione è derivabile e la derivata prima si è annullata una sola volta, il minimo relativo trovato è anche assoluto; il valore massimo assoluto (cui per altro non siamo interessati), la funzione lo assume in uno dei due estremi, eventualmente in entrambi (ciò si verifica se i due punti A, B sono equidistanti dalla retta *r*).

Riportiamo i valori assunti negli estremi dell'intervallo

$$f(0)=d_1+\sqrt{l^2+d_2^2}\,; \qquad f(l)=\sqrt{l^2+d_1^2}+d_2$$

E' interessante notare che sussiste l'implicazione

$$d_1>d_2 \Rightarrow f(0)>f(l).$$

Infatti, impostando la disuguaglianza, per la positività dei singoli termini, elevando al quadrato ambo i membri e semplificando si ha

$$d_1+\sqrt{l^2+d_2^2}>\sqrt{l^2+d_1^2}+d_2 \Leftrightarrow d_1\sqrt{l^2+d_2^2}>d_2\sqrt{l^2+d_1^2}\,;$$

quadrando ulteriormente si ottiene

$$d_1^2l^2+\cancel{d_1^2d_2^2}>d_2^2l^2+\cancel{d_1^2d_2^2} \Leftrightarrow d_1^2>d_2^2$$

e questa disuguaglianza è vera per l'ipotesi $d_1>d_2$.

Dalla simmetria del problema, con analoghe elaborazioni si dimostra che sussiste l'implicazione

$$d_2>d_1 \Rightarrow f(l)>f(0)$$

Approfondimento

Per dimostrare che la soluzione trovata con il metodo analitico coincide con quella determinata sinteticamente occorre provare che per

$$x=\frac{ld_1}{d_1+d_2},$$

che rappresenta la misura del segmento AP corrispondente alla posizione di P soluzione del problema, il punto P coincide con il punto I, quindi che i punti A′, P, B sono allineati.

Questa tesi la possiamo provare facendo vedere che gli angoli APH , BPK sono congruenti. Infatti, visto che $APH \cong A'PH$ per ogni posizione di P, ma che $A'PH \cong BPK$ solo se i punti A′, P, B sono allineati, provare la congruenza $APH \cong BPK$ equivarrà a provare l'allineamento dei tre punti.

Per dimostrare la congruenza dei due angoli indicati, tenendo presente che sono acuti, proviamo che sussiste l'uguaglianza goniometrica

$$tg\left(APH\right)=tg\left(BPK\right)$$

Infatti si ha:

$$tg\left(APH\right)=\frac{\overline{AH}}{\overline{HP}}=\frac{d_1}{\frac{ld_1}{d_1+d_2}}=\frac{d_1+d_2}{l};$$

$$tg\left(BPK\right)=\frac{\overline{BK}}{\overline{KP}}=\frac{d_2}{l-\overline{HP}}=\frac{d_2}{\frac{ld_2}{d_1+d_2}}=\frac{d_1+d_2}{l}$$

C.V.D.