

Esame di Stato di Liceo Scientifico P.N.I. – a.s. 2004-2005
Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q1 Q2 Q3

Questionario

Q1- Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$.

Soluzione

Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento, per definizione, è la parte del segmento che risulta media proporzionale tra l'intero segmento e la parte dell' stesso che rimane sottraendo al segmento la sua parte aurea.

Nella figura a lato è indicato il segmento AB ed è

indicato il punto P interno ad esso. Posto $\overline{AB} = l$,

$\overline{AP} = x$, affinché il segmento AP sia la parte aurea del segmento AB la misura x (positiva) deve verificare la seguente proporzione

$$l : x = x : (l - x) \text{ da cui } x^2 + lx - l^2 = 0; \text{ si ricava } x = \frac{l \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

Osserviamo che $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,618$, quindi la sezione aurea di un

segmento rappresenta quasi il 62% del segmento.

Il quesito chiede di dimostrare che il lato del decagono regolare è uguale alla sezione aurea del raggio della circonferenza in cui è inscritto. Per dimostrare l'affermazione si deve considerare un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice di 36° (e conseguentemente i due angoli alla base di misura 72°) e far vedere che la base del triangolo rappresenta la sezione aurea del lato.

In riferimento al triangolo isoscele rappresentato a lato con le caratteristiche indicate, si osservi che tracciando la bisettrice AD dell'angolo alla base nel vertice A, il triangolo ABD è isoscele e simile al triangolo ABC; anche il triangolo ADC è isoscele con $AD \cong CD$. Sussiste la seguente proporzione

$$BC : AB = AD : BD$$

dalla quale emerge che si può anche scrivere

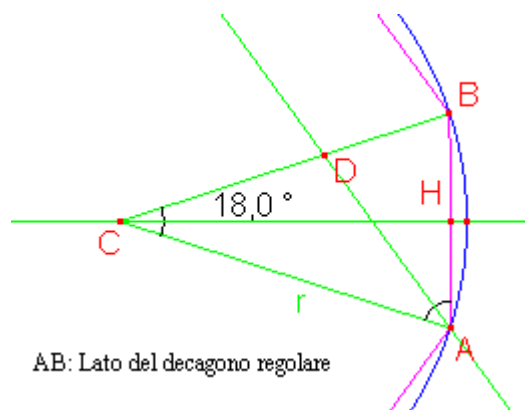
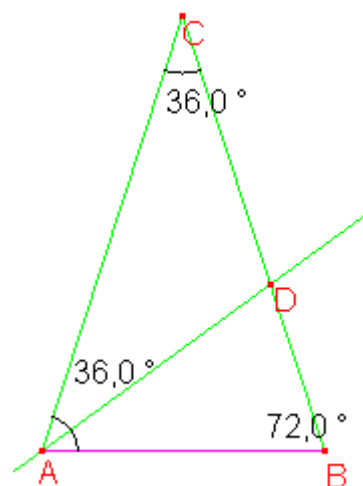
$$BC : CD = CD : BD$$

Ma evidentemente $BD = BC - CD$ e quindi CD è la sezione aurea di BC; poiché $CD \cong AB$ la tesi è acquisita.

A questo punto si può tornare al decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r .

Notiamo che unendo due vertici consecutivi con il centro della circonferenza si ottiene un triangolo isoscele con l'angolo nel centro C della circonferenza che misura 36° (un decimo dell'angolo giro) e dunque per la dimostrazione precedente la misura del lato del decagono (base del triangolo) rappresenta la sezione aurea del raggio. Indicando con l_{10} la misura del lato del decagono regolare e con r la misura del raggio possiamo porre

$$l_{10} = \frac{r \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2}$$



AB: Lato del decagono regolare

D'altra parte, considerando la bisettrice CH dell'angolo al vertice C, l'angolo BCH misura 18° e dal triangolo rettangolo CHB possiamo scrivere

$$\sin(BCH) = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin(18^\circ) = \frac{l_{10}/2}{r} = \frac{r \cdot (\sqrt{5}-1)}{4 \cdot r} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$$

Calcolo di $\sin(36^\circ)$

Ricordiamo che dalle formule di duplicazione si ha

$$\sin(36^\circ) = 2\sin(18^\circ) \cdot \cos(18^\circ)$$

e che possiamo calcolare $\cos(18^\circ)$ dalla relazione

$$\cos(18^\circ) = \sqrt{1 - \sin^2(18^\circ)} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Lasciamo al lettore le ultime elaborazioni algebriche. Il risultato richiesto è

$$\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

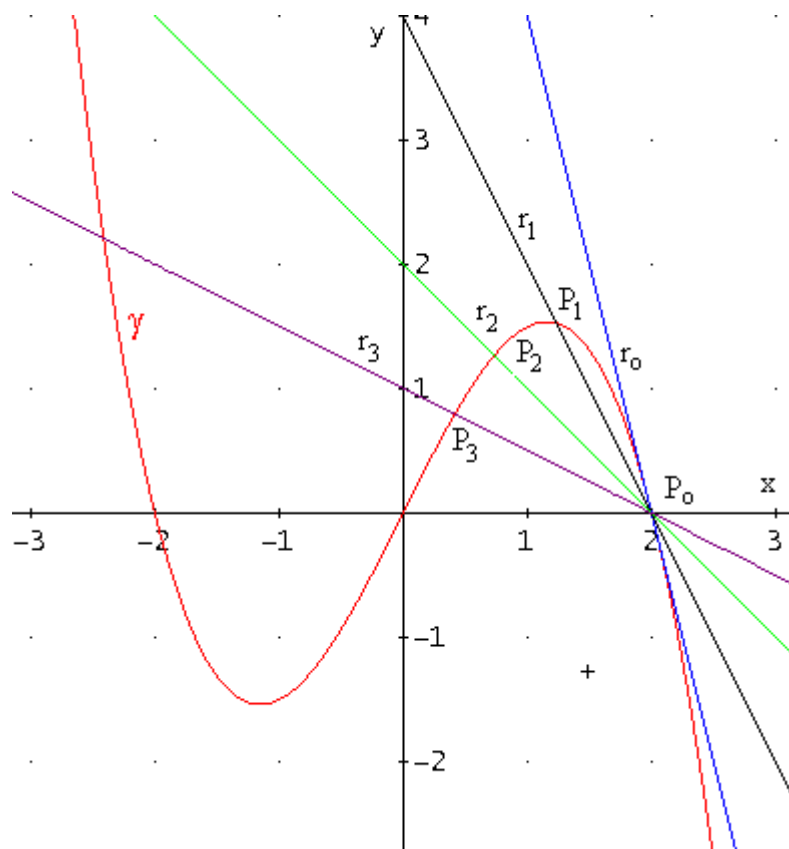
Commento

Si tratta di un problema classico. L'argomento della sezione aurea di un segmento è trattata nella geometria piana del secondo Liceo Scientifico. Assegnando questo quesito l'autore ha voluto verificare se il candidato conoscesse il significato di sezione aurea di un segmento, se conoscesse la relazione tra la misura del lato del decagono regolare e quella del raggio della circonferenza in cui è inscritto ed infine se il candidato conoscesse adeguatamente alcune formule goniometriche.

Q2 – Si dia una definizione di retta tangente ad una curva .
Successivamente, si dimostri che la curva $y=x \cdot \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x=1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.

Soluzione

Per definizione una retta r ed una curva γ sono tangenti in un punto comune P quando in tale punto si raccolgono almeno due punti comuni. Si può fornire un'immagine dinamica molto intuitiva del concetto di retta tangente in un punto P_0 ad una curva pensando ad una retta secante la stessa in P_0 ed in un secondo punto Q . Mantenendo fisso il punto P_0 si può spostare il punto Q sulla curva avvicinandolo sempre di più al punto P_0 e considerando ogni volta la retta che unisce P_0 ed il punto Q . Ebbene, se al tendere di Q a P_0 la retta che li congiunge assume una ben precisa posizione limite allora si dirà che quella retta è tangente alla curva nel punto P_0 . Nella figura a lato ho rappresentato la retta r_0 tangente alla curva nel punto P_0 ed altre tre rette r_3, r_2, r_1 corrispondenti a tre posizioni distinte del punto P_1 che si avvicina, muovendosi sulla curva, al punto P_0 .



Al di là di questa interpretazione dinamica e “suggestiva” della retta tangente ad una curva, ricordiamo che quando è nota l’equazione cartesiana di una curva nella forma $y=f(x)$, allora se nel punto x_0 del dominio la funzione $f(x)$ è derivabile allora il diagramma della funzione ammette retta tangente nel punto $(x_0; f(x_0))$ e l’equazione di tale tangente è

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.1)$$

L’equazione della retta tangente indica che il suo coefficiente angolare nel punto x_0 coincide con il valore della derivata prima della funzione nello stesso punto. Inoltre si riconosce immediatamente che l’equazione della retta tangente è soddisfatta dalla coordinate $(x_0; f(x_0))$ e questo è un punto del diagramma della curva.

Nel caso in esame è stata fornita una funzione che è continua e derivabile su tutto l’asse reale, la sua derivata prima è

$$y' = \text{sen}x + x \cdot \cos x \quad (2.2)$$

Mettendo a sistema l’equazione della curva con l’equazione della retta $y=x$ si osserva che

$$\begin{cases} y = x \cdot \text{sen}x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x(\text{sen}x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (\text{sen}x - 1 = 0)$$

Si riconosce che la curva e la retta hanno in comune il punto origine degli assi $(0;0)$ e tutti i punti

$$P_k \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \text{ Per } x = x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ risulta } \text{sen}x = 1. \text{ Per provare che in}$$

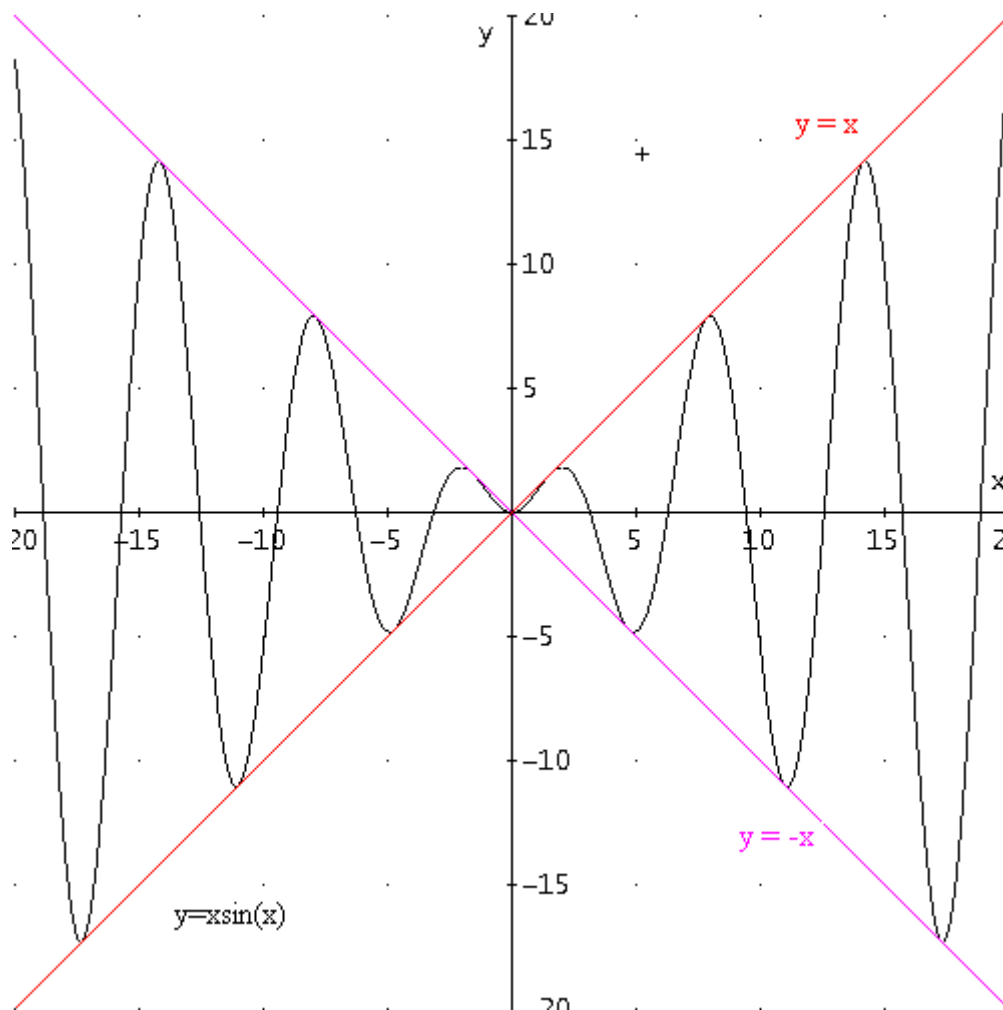
ciascuno dei punti P_k la retta di equazione $y = x$ è tangente alla curva diagramma della funzione è sufficiente provare la derivata prima della funzione negli stessi punti è uguale al coefficiente angolare della retta, cioè che risulta $f'(x_k) = 1$.

Ebbene, avendosi

$$\begin{aligned} f'(x) = y' = \text{sen}x + x \cdot \cos x &\Rightarrow f' \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \\ &1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

La tesi è dunque acquisita.

In modo analogo si prova che il diagramma della funzione è tangente alla retta $y = -x$ nei punti in cui risulta $\text{sen}x = -1$. L’esercizio viene lasciato al lettore.



Q3 – Si determinino le equazioni delle due simmetrie assiali σ , φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazioni:

$$\tau: \begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$

Soluzione

Fissato il sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico xOy , considerando come primo asse di simmetria la bisettrice del primo e terzo quadrante $a_1: y = x$ e come secondo asse di simmetria la retta parallela alla prima avente equazione $a_2: y = x - \sqrt{5}$, applicando prima la simmetria rispetto ad a_1 e successivamente quella rispetto ad a_2 si ottiene come trasformazione la traslazione assegnata nel testo.

Per verificare l'affermazione fatta si deve tener presente che nel piano cartesiano le equazioni della simmetria assiale σ avente per asse la retta $a: y = mx + q$ sono

$$\sigma: \begin{cases} x' = \frac{1}{m^2 + 1} [(1 - m^2)x + 2my - 2mq] \\ y' = \frac{1}{1 + m^2} [2mx + (m^2 - 1)y + 2q] \end{cases} \quad (3.1)$$

nel senso che essa trasforma il punto $P(x;y)$ nel punto $P'(x';y')$, con $(x';y')$ espresse in funzione di $(x;y)$ così come indicato nelle equazioni (3.1).

Rimanendo aderenti ai simboli utilizzati nel testo, indichiamo con φ la simmetria di asse $a_1 : y = x$ e con σ quella di asse $a_2 : y = x - \sqrt{5}$. In

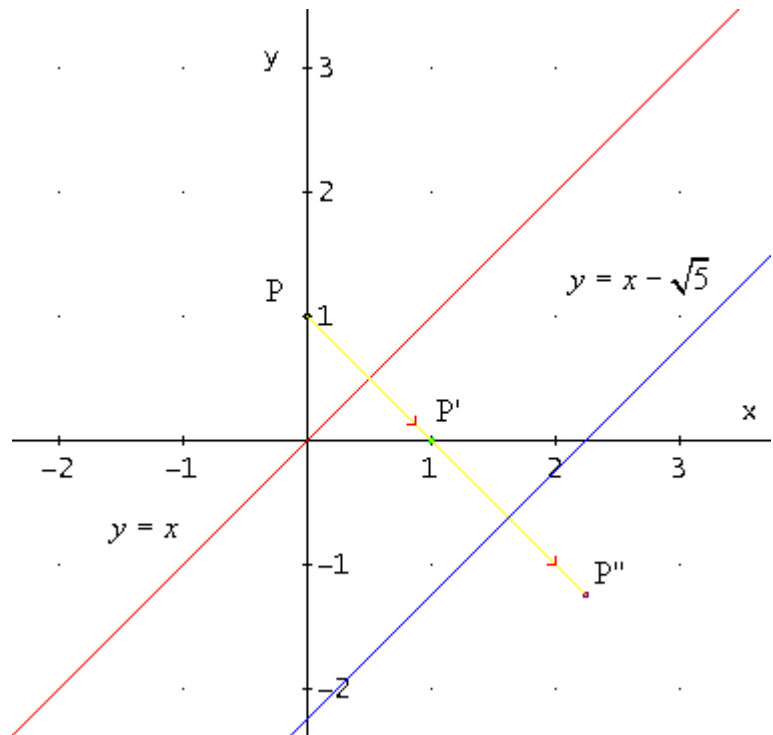
questo contesto sorvoliamo sulle considerazioni di carattere geometrico che permettono di individuare i due assi di simmetria a_1, a_2 indicati ma facciamo due considerazioni.

- 1) La traslazione indicata nel testo è determinata dal vettore $\vec{V} = \sqrt{5}\vec{i} - \sqrt{5}\vec{j}$ che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di -45° ed il cui modulo è $|\vec{V}| =$

$$\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}. \text{ Il}$$

vettore è perpendicolare ai due assi di simmetria suddetti.

- 2) Nella simmetria φ ogni punto P dell'asse a_1 rimane fisso: $\varphi(P)=P$; detto P' il trasformato di P nella traslazione $\tau, \tau(P)=P'$, evidentemente applicando a P la simmetria σ rispetto all'asse a_2 si deve avere $\sigma(\varphi(P))=P'$. Il segmento orientato $\overrightarrow{PP'}$ deve essere equipollente al vettore $\vec{V}$. Poiché $\overrightarrow{PP'}$ deve essere perpendicolare all'asse a_2 (per la simmetria) si deduce che la distanza d tra i due assi di simmetria a_1, a_2 deve essere uguale alla metà del modulo del vettore $\vec{V} \Rightarrow$
 $d = |\vec{V}|/2 = \sqrt{10}/2.$



Le considerazioni precedenti dovrebbero essere sufficienti per il lettore attento a determinare le equazioni dei due assi di simmetria indicati.

Verifichiamo l'uguaglianza $\sigma \circ \varphi = \tau$

In virtù delle (3.1) le equazioni della simmetria assiale φ sono

$$\varphi: \begin{cases} x' = \frac{1}{1^2+1}[(1-1^2)x + 2 \cdot 1y - 2 \cdot 1 \cdot 0] \\ y' = \frac{1}{1+1^2}[2 \cdot 1x + (1^2-1)y + 2 \cdot 0] \end{cases} \Rightarrow \varphi: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad (3.2)$$

e quelle della simmetria assiale σ sono

$$\sigma: \begin{cases} x'' = \frac{1}{1^2+1}[(1-1^2)x' + 2 \cdot 1y' + 2\sqrt{5}] \\ y'' = \frac{1}{1+1^2}[2 \cdot 1x' + (1^2-1)y' - 2\sqrt{5}] \end{cases} \Rightarrow \sigma: \begin{cases} x'' = y' + \sqrt{5} \\ y'' = x' - \sqrt{5} \end{cases} \quad (3.4)$$

Consideriamo ora il generico punto $P(x;y)$ del piano cartesiano. Sottoponendolo alla simmetria φ viene trasformato nel punto $P'(x';y')$, con $x' = y$ e $y' = x$; applicando a $P'(x';y')$ la simmetria σ si ottiene come trasformato il punto $P''(x'';y'')$; sostituendo nelle (3.4) x' con y e y' con x si ottiene

$$\sigma(\varphi(P)) : \begin{cases} x'' = x + \sqrt{5} \\ y'' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

e ciò dimostra che $\sigma(\varphi(P)) = \tau(P)$. C.V.D.

Osservazione

Se si scambia l'ordine nell'applicare le due simmetrie si ottiene la traslazione determinata dal vettore $\vec{V}^* = -\vec{V}$ le cui equazioni sono

$$\tau^* : \begin{cases} x' = x - \sqrt{5} \\ y' = y + \sqrt{5} \end{cases}$$

Di ciò lasciamo la verifica al lettore.