Esame di Stato di Liceo Scientifico P.N.I. – a.s. 2004-2005

Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q9

Questionario

Q9- Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi ? Se i lanci vengono ripetuti qual è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E qual è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

Soluzione

Prima parte

Facce	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
2	(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
3	(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
4	(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
5	(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
6	(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

Lanciando due dadi il risultato della somma dei due numeri che si presentano sulle due facce superiori è un numero intero che va da 2 a 12. Operando con dadi regolari si possono presentare 36 disposizioni diverse per le facce, però gli undici possibili valori per la somma non sono equiprobabili, come ci si rende immediatamente conto osservando la tabella a lato. Infatti, delle trentasei disposizioni delle facce, quelle che forniscono come somma 10 sono solo tre e quindi, dalla definizione classica di probabilità, la probabilità dell'evento

E=" La somma delle facce di due dadi (regolari) è 10"

è $P(E)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ (1)

Seconda parte

Effettuando più volte il lancio dei due dadi, sia X il numero di volte che si presenta come somma delle due facce il numero 10. Se il lancio si effettua 6 volte allora X può assumere uno dei seguenti valori 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Infatti la somma 10 può non verificarsi alcuna volta nei sei lanci, come pure può verificarsi sei volte. Noi dobbiamo calcolare la probabilità che nei sei lanci la somma 10 si verifichi esattamente due volte, quindi la probabilità P(X=2).

Ebbene, in ogni lancio l'evento E ha probabilità di verificarsi $p=\frac{1}{12}$ e probabilità di non verificarsi $q=1-p=\frac{11}{12}$. Occupandosi delle variabili (casuali) bernoulliane si dimostra che ripetendo le prove (i lanci) n volte, la probabilità che l'evento E si verifichi k ($\le n$) volte, cioè che risulti X=k, è

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k} \qquad (2)$$

e dunque nel nostro caso

$$P(X=2)=\binom{6}{2}p^2\cdot q^4=\frac{6!}{2!\,4!}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^4=15\cdot\frac{11^4}{12^6}\simeq 7,4\%$$

Terza parte

Osserviamo che la negazione dell'evento

E="Nei sei lanci almeno due volte la somma delle due facce è 10"

è l'evento

$\overline{E}$ ="Nei sei lanci la somma 10 esce al massimo una volta"

e sappiamo che

$$P(E)=1-P\left(\overline{E}\right)$$

L'evento $\overline{E}$ si verifica se la somma 10 non esce affatto, oppure esce una sola volta. In virtù della formula (2) si ha

$$P(X=0)=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^6=\left(\frac{11}{12}\right)^6$$

$$P(X=1)=\binom{6}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1\left(\frac{11}{12}\right)^5=6\cdot\frac{11^5}{12^6}$$

e dunque anche

$$P\left(\overline{E}\right)=P(X=0)+P(X=1)=\left(\frac{11}{12}\right)^6+6\cdot\frac{11^5}{12^6}=\frac{11^5\cdot 17}{12^6}\simeq 91,69\%$$

In definitiva la probabilità dell'evento richiesto è

$$P(E)=1-0,9169\simeq 8,31\%$$