Esame di Stato di Liceo Scientifico P.N.I. – a.s. 2004-2005
Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q8
Questionario

Q8- Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t+2$ e $y = e^{-t}+3$ nel suo punto di coordinate (3,4).

Soluzione

Notiamo innanzitutto che il punto A(3;4) della curva γ si ottiene ponendo t=0 nelle equazioni parametriche; inoltre le funzioni analitiche

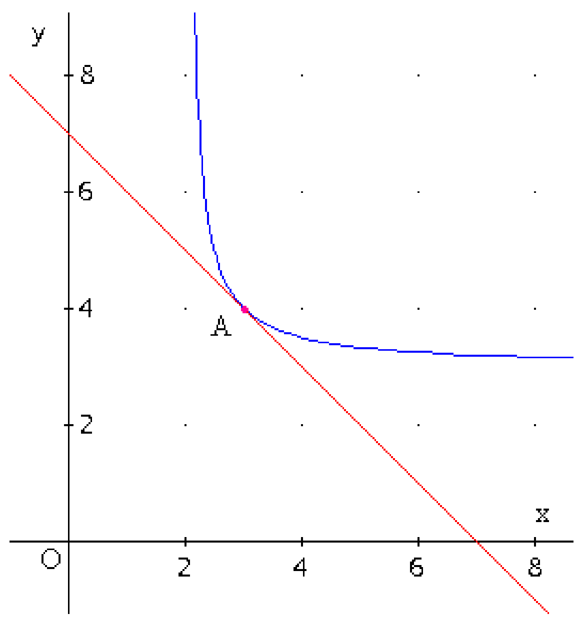
$$x(t)= e^t+2,$$
$$y(t)= e^{-t}+3 \qquad (1)$$

sono continue e derivabili per ogni valore reale della variabile t, con $x'(t)= e^t\neq 0$, $y'(t)= -e^{-t} \neq 0$. Queste condizioni assicurano che la curva è regolare ed è dotata di tangente in ogni suo punto. A tal proposito ricordiamo che una curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (2)$$

con le funzioni $x(t)$, $y(t)$ continue e derivabili, se risulta $\left(x'(t); y'(t)\right) \neq (0;0)$, cioè se le derivate prime non si annullano contemporaneamente, allora la **curva** si dice **regolare**. Nel nostro caso ciò si verifica. Inoltre, con t_o appartenente al dominio di definizione delle funzioni $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, posto $P_o(x(t_o); y(t_o))= P_o(x_o;y_o)$, nell'ipotesi che si verifichi $x'(t_o)\neq 0$ e $y'(t_o)\neq 0$, l'equazione della retta tangente in P_o è

$$\frac{x-x_o}{x'(t_o)} = \frac{y-y_o}{y'(t_o)} \qquad (3)$$



Nel caso in esame siamo interessati al punto P_o della curva corrispondente al valore $t_o=0$ ed avendosi

$x(0) = e^0 + 2=3$, $y(0) =1+3 = 4$, $x'(0) = e^0 = 1$, $y'(0) = -e^0 = -1$

segue che l'equazione della retta tangente alla curva nel punto P_o (3;4) è

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-1} \Leftrightarrow y = -x + 7$$

Osservazione

Si può risolvere in modo diverso il quesito. Precisamente, partendo dalle equazioni parametriche della curva si cerca la sua equazione cartesiana nella forma $y=f(x)$ [(1)], quindi si determina l'equazione della retta tangente nel punto A(3;4) con il modello

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

Mettendo a sistema le equazioni parametriche della curva γ si ha

[(1)] Va precisato che questo secondo metodo non è sempre di agevole esecuzione, mentre il primo metodo indicato è meglio gestibile. E' sempre preferibile disporre delle equazioni parametriche di una curva, piuttosto che dell'equazione cartesiana della stessa.

$$\begin{cases} x = e^t + 2 \\ y = e^{-t} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^t = x-2 \\ y = \dfrac{1}{x-2} + 3 \end{cases} \Rightarrow \; y = \frac{3x-5}{x-2} \Rightarrow \qquad y' = -\frac{1}{(x-2)^2} \text{ e quindi } y'(3) = -1$$

L'equazione della retta tangente richiesta è
$y-4 = -1(x-3) \Leftrightarrow \; y = -x+7$
Che coincide con quella trovata con il primo metodo.
Prima di chiudere le riflessioni su questo secondo metodo voglio sottolineare che la curva γ di equazioni (1) non coincide con la curva γ' corrispondente all'equazione cartesiana $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$; infatti, γ è solo uno dei due rami che compongono γ', che è un'iperbole equilatera: il ramo di γ' che rappresenta γ è quello i cui punti hanno ascissa *x*>2 e, conseguentemente, ordinata maggiore di 3.
Nella figura abbiamo riportato parzialmente il diagramma della curva γ e quello della retta tangente nel punto A(3;4).