# Esame di Stato di Liceo Scientifico P.N.I. – a.s. 2004-2005

## Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q7

## Questionario

**Q7**-Come si definisce $n!$ ($n$ fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Qual è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

### Soluzione

Se $n$ è un numero naturale diverso da zero al simbolo $n!$ si attribuisce il valore numerico dato dal prodotto degli $n$ numeri naturali

1; 2; 3; ; $(n-1)$; $n$

Quindi per definizione si ha

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \qquad (7.1)$$

Per convenzione si pone inoltre

$$0! = 1 \qquad (7.2)$$

Nel calcolo combinatorio il fattoriale $n!$ interviene frequentemente. In particolare si riconosce che:

- Presi $n$ oggetti distinti, il numero delle permutazioni che si possono ottenere con essi è proprio $n!$

  **Esempi**

  - Con le prime tre lettere dell'alfabeto **a,b,c** le possibili permutazioni sono 3!=3·2·1=6 e sono

    abc, acb, bac, bca, cab, cba

  - Se consideriamo la parola ROSA, tutti i possibili anagrammi sono 4!=4·3·2·1=24 . Ce ne sono 6 la cui prima lettera è R, altri 6 la cui prima lettera è O, altri 6 la cui prima lettera è S, altri 6 la cui prima lettera è A.

    Riporto per brevità solo quelli che iniziano con R.

    ROSA, ROAS, RSOA, RSAO, RASO, RAOS

- Presi $n$ oggetti distinti, il numero delle **disposizioni semplici della classe *k*** che si possono formare, ovvero la totalità dei gruppi che si possono comporre con $k$ oggetti distinti scelti tra gli $n$ dati, ritenendo due gruppi diversi se differiscono per almeno un elemento o per l'ordine con cui gli stessi elementi sono presi, è

  $$D_{n,k} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1) \qquad (7.3)$$

- Presi $n$ oggetti distinti, il numero delle **combinazioni semplici della classe *k*** che si possono formare, ovvero la totalità dei gruppi che si possono comporre con $k$ oggetti distinti scelti tra gli $n$ oggetti dati, ritenendo due gruppi diversi solo se differiscono per almeno un elemento (e non per l'ordine) è

  $$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad (7.4)$$

### Legame di *n*! con i coefficienti binomiali

Lo sviluppo della potenza *n-sima* di un binomio $(a+b)^n$ può essere ottenuto ricorrendo alla seguente formula (conosciuta come regola di Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad (7.5)$$

Nella formula il simbolo $\binom{n}{k}$ è detto coefficiente binomiale ed il suo significato è il seguente

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad (7.6)$$

In virtù della convenzione (7.2) si deducono i casi particolari

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{n}=1.$$

Chiudiamo queste considerazioni sul fattoriale di un numero intero ricordando che sussistono le seguenti relazioni

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$ Legge delle classi complementari

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$ Legge di Stiefel

$$\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}$$ Legge di ricorrenza