Esame di Stato di Liceo Scientifico P.N.I. – a.s. 2004-2005

Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q6

Questionario

Q6- Le rette r e s di equazioni rispettive $y = 1+2x$, $y= 2x -4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.

Soluzione

E' evidente che l'autore del testo faccia riferimento ad un piano dotato di sistema di riferimento cartesiano xOy. Ricordiamo che un'omotetia in un piano π è determinata da un punto, detto centro dell'omotetia, e da un fattore k≠0, detto rapporto dell'omotetia. Se il centro dell'omotetia è il punto $C(x_c,y_c)$ ed è fissato il numero reale k≠0, l'omotetia determinata da questi due elementi è l'applicazione

$$\sigma : \pi \to \pi$$

che associa ad ogni punto P(*x*;*y*) diverso dal centro C il punto P′(x′;y′) allineato con C e P le cui coordinate verificano le due seguenti uguaglianze

$$x' - x_c = k(x - x_c), \qquad y' - y_c = k(y - y_c) \qquad (6.1)$$

La trasformazione associa al centro C lo stesso punto.

Osservazione

Il centro dell'omotetia è punto unito nella trasformazione.

Nel caso in esame il centro dell'omotetia coincide con l'origine degli assi e perciò si tratta di determinare il valore del fattore *k*. Le equazioni (6.1) si riducono alle seguenti

$$x' = kx, \qquad y' = ky \qquad (6.2)$$

Per determinare il valore del rapporto di omotetia si deve determinare l'equazione della trasformata della retta *r* ed imporre che coincida con l'equazione della retta *s*.

$$r : y = 1 + 2x, \qquad s : y = 2x - 4$$

L'equazione della trasformata σ(*r*) si determina ricavando le inverse delle (6.2), sostituendole nell'equazione della retta r ed eliminando gli apici. Operativamente si ha:

$$x' = kx \Rightarrow x = \frac{x'}{k};$$

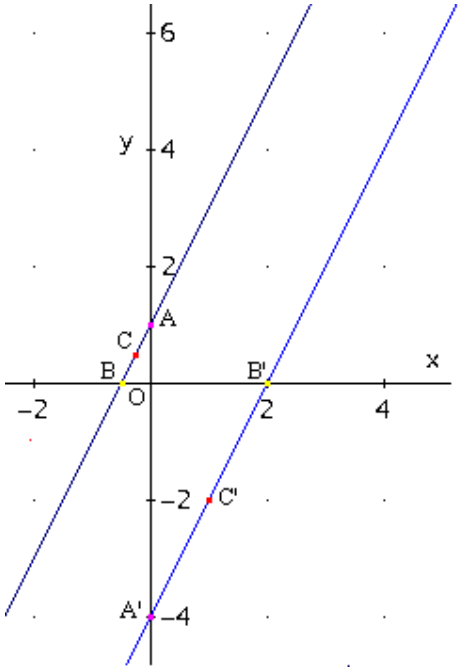
$$y' = ky \Rightarrow y = \frac{y'}{k}$$

$$r : y = 1 + 2x \Rightarrow \sigma(r) : \frac{y'}{k} = 1 + 2 \cdot \frac{x'}{k} \text{ e quindi}$$

$$\sigma(r) : y' = k + 2x'$$

Eliminando gli apici si ricava

$$\sigma(r) : y = k + 2x.$$



A questo punto imponiamo che l'equazione ottenuta coincida con quella della retta *s*. Si riconosce che ciò si verifica solo con *k* = -4.

Le equazioni dell'omotetia in oggetto sono perciò le seguenti:

$$\sigma : \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}.$$

Nella figura riportata abbiamo indicato tre coppie di punti che si corrispondono nell'omotetia.

$A(0;1) \rightarrow A'(0;-4)$;

$B\left(-\frac{1}{2};0\right) \rightarrow B'(2;0)$;

$C\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) \rightarrow C'(1;-2)$