Esame di Stato di Liceo Scientifico P.N.I. – a.s. 2004-2005

Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q4

Questionario

Q4- Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero in contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

Soluzione

La lattina ha forma cilindrica; siano

r la misura del raggio dei due cerchi di base;

h la misura dell'altezza.

L'area della superficie totale della lattina è data dalla somma dell'area della superficie laterale con la somma della aree delle due basi. Con i simboli introdotti possiamo scrivere

$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad (4.1)$$

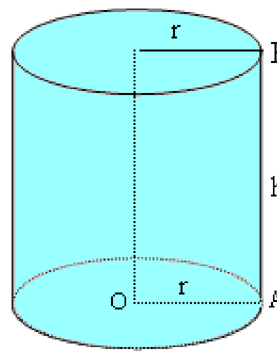


Fig.1

La misura V del volume occupato è

$$V = \pi r^2 h \qquad (4.2)$$

Il testo fornisce la capacità della lattina e trascurando lo spessore della latta la capacità coincide con la misura del volume. Dunque V=0,4*l*=400cm^3.

Dalla (4.2) si ricava il valore dell'altezza che sostituito nella (4.1) permette di esprimere il valore dell'area totale della lattina, quindi la misura dell'estensione della superficie della latta utilizzata in funzione del raggio. Si ha:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow A_t = 2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \frac{V}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Si tratta di stabilire per quale valore della variabile r (>0) la funzione

$$f(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \qquad (4.3)$$

assume il suo valore minimo. Nell'espressione analitica della funzione V e π sono costanti. Calcoliamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno.

$$f'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$f'(r) \geq 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 2V \geq 0 \Leftrightarrow r \geq \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad (4.4)$$

La funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $\left]0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right[$, strettamente crescente nell'intervallo $\left]\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; +\infty\right[$ e dunque per $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ assume il suo minimo assoluto. Sostituendo a V il valore noto si ha

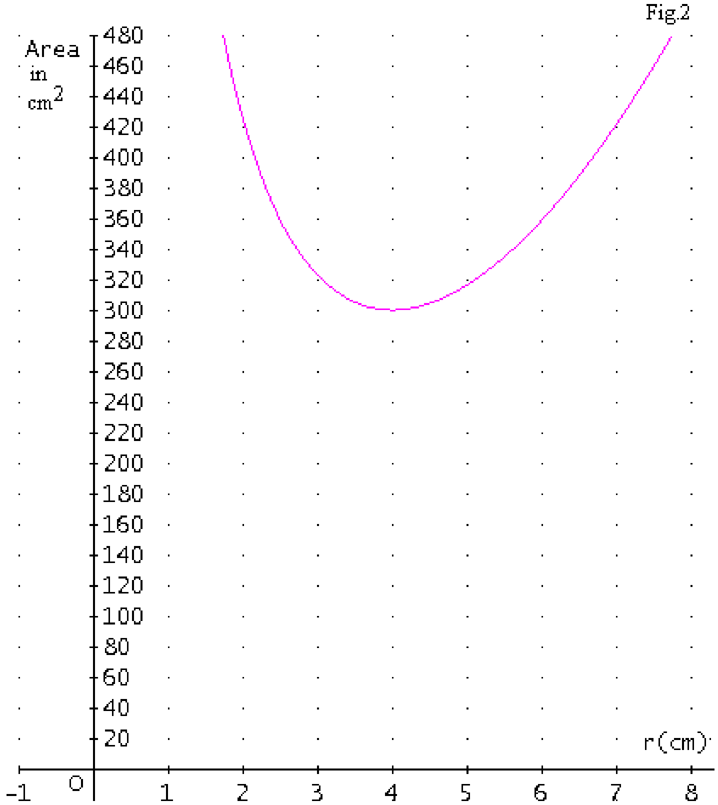
$$r = \sqrt[3]{\frac{400cm^3}{2\pi}} \approx 3{,}99cm$$

Possiamo ora ricavare la misura dell'altezza della lattina

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \approx \frac{400cm^3}{3.14 \cdot (3{,}99)^2\, cm^2} \approx 8{,}0cm$$

In Fig.2 è rappresentato parzialmente il diagramma della funzione *f*(*r*) dell'area totale della lattina avente capacità 400 cm^3.

Fig.2



Osservazione

La classica lattina con cui si distribuiscono in commercio le bibite ha una capacità di 330ml, cioè di 330 cm^3. Se la forma rispettasse il criterio della minima superficie totale di latta utilizzata dovrebbe avere le seguenti dimensioni

$$r = \sqrt[3]{\frac{330}{2\pi}} cm \approx 3,75 cm \;;$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \approx \frac{330 cm^3}{3.14 \cdot (3,75)^2 \, cm^2} \approx 7,47 cm$$

Lo studente cerchi qualche lattina e verifichi se le dimensioni sono quelle indicate. Per evitare sprechi ……si potrebbe suggerire…..

Approfondimento

Vogliamo soffermarci ancora un po' sulle caratteristiche geometriche della "lattina ideale" per scoprire eventuali sue proprietà al di là del valore particolare di 0,4*l* assegnato per la capacità. Vogliamo occuparci del seguente problema:

''Se è assegnato il valore V del volume della cilindro circolare retto, che relazione esiste tra la misura dell'altezza h e quella del raggio r delle due basi allorché l'area della superficie totale è minima? ''

Per risolvere il quesito facciamo notare che la funzione area totale (4.3) assume il valore minimo per $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; si può esprimere in funzione del volume V il valore dell'altezza del cilindro, tenendo conto che comunque risulta $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Si ha

$$h = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3}\cdot\frac{4\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Confrontando ora il valore dell'altezza con quello del raggio si ha

$$\frac{h}{r} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} : \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{V}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Dunque l'altezza del cilindro è doppia del raggio e perciò **il cilindro è equilatero**.

Conclusione

Tra tutti i cilindri circolari retti aventi determinato volume quello equilatero ha la minima estensione della superficie totale.