Esame di Stato di Liceo Scientifico P.N.I. – a.s. 2004-2005

Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q10

Questionario

Q10- Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Soluzione

Suddividiamo la popolazione del Paese X in esame in due sottoinsiemi:

S_1 Il sottoinsieme composto dalle persone di età minore di 60 anni;

S_2 il sottoinsieme composto dalle persone di età maggiore o uguale a 60 anni.

Siano

e_1 l'età media delle persone appartenenti ad S_1;

e_2 l'età media delle persone appartenenti ad S_2 .

Dalle informazioni fornite deduciamo che sussistono le disuguaglianze seguenti

$0 < e_1 < 60$ anni, $e_2 \geq 60$ anni.

Si tratta di fare una previsione sull'età media dell'intera popolazione del paese X. Ebbene, sappiamo che il 40% della popolazione compone l'insieme S_2 e, quindi, che il restante 60% compone l'insieme S_1. Dovendo esprimere un valutazione di sintesi sull'età media della popolazione dobbiamo tener conto del "peso" con cui ciascuno dei due valori e_1, e_2 concorre nella determinazione dell'età media complessiva. L'età media e di tutta la popolazione è data dalla media ponderata di e_1, e_2, essendo p_1=60 e p_2=40 i rispettivi pesi. Dunque

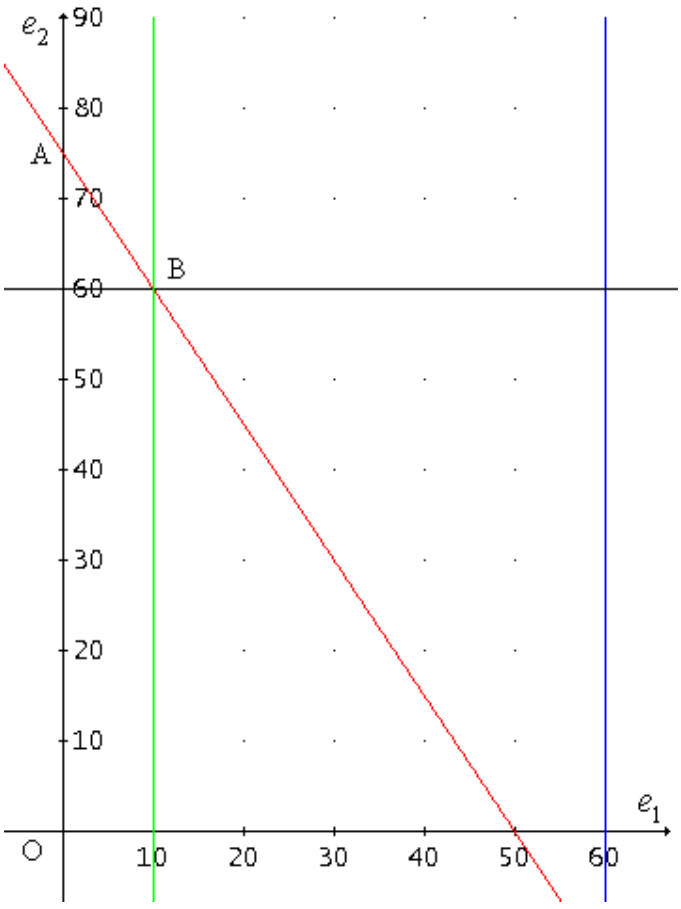
$$e = \frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{p_1 + p_2} = \frac{60 \cdot e_1 + 40 \cdot e_2}{60 + 40} = \frac{3}{5} \cdot e_1 + \frac{2}{5} \cdot e_2$$

Si tratta ora di stabilire se l'età media complessiva di tutte le persone del paese possa essere 30 anni. A questa domanda si risponde risolvendo il seguente sistema misto

$$\begin{cases} \frac{3}{5} \cdot e_1 + \frac{2}{5} \cdot e_2 = 30 \\ (0 < e_1 < 60) \wedge (e_2 \geq 60) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3e_1 + 2e_2 = 150 \\ (0 < e_1 < 60) \wedge (e_2 \geq 60) \end{cases} \quad (1)$$

Ci serviamo della grafica per trovare la risposta e rappresentiamo nel piano cartesiano $e_1 O\, e_2$ il legame lineare tra e_1 ed e_2 ed i vincoli cui questi valori sono soggetti (vedi figura a lato).



Ci poniamo la **domanda**.

Cosa stiamo cercando?

Risposta: Se esistono valori opportuni per le età medie e_1, e_2 delle persone dei due sottoinsiemi S_1, S_2 in cui è stata suddivisa la popolazione del Paese X che verifichino il sistema misto (1).

Sul grafico sono indicati i punti A(0;75), B(10;60). Possiamo affermare che tutti i punti interni al segmento AB hanno coordinate che rappresentano soluzioni al problema. Dunque, dal punto di vista teorico, è possibile che l'età media di tutta la popolazione del Paese sia 30 anni. Nella tabella a lato riporto a titolo esemplificativo alcuni valori ammissibili per le età e_1, e_2.

$3e_1+2e_2=150$	
Età media del 60% della popolazione	Età media del 40% della popolazione
e1 (anni)	e_2 (anni)
1	73,5
2	72
3	70,5
4	69
5	67,5
6	66
7	64,5
8	63
9	61,5
10	60

Commento

Osservando i valori riportati nella tabella a lato sono indotto a ritenere che le distribuzioni delle età (medie) della popolazione di quel Paese siano poco realistiche. Voglio far notare che anche se l'età media delle persone con un numero di anni maggiore o uguale a 60 anni fosse molto vicina a 60 anni, l'età media della restante parte della popolazione dovrebbe essere inferiore a 10 anni; una tale ipotesi implica che lo strato dei neonati e quello dei bambini dovrebbe essere preponderante rispetto alle altre fasce.

Suggerimento didattico

Molte volte cerchiamo di appassionare i nostri studenti presentando nel corso delle lezioni problemi di vita quotidiana e non solo quelli preparati a tavolino. In questo caso penso che avrei fatto una telefonata all'ufficio anagrafe del mio Comune per conoscere la percentuale della popolazione con età non minore di 60 anni ed avrei confezionato conseguentemente il quesito.