

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

Soluzione

1. La parabola λ assegnata ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate, il vertice nel punto $V(0;6)$, concavità rivolta verso il basso e taglia l'asse delle ascisse nei due punti $A(\sqrt{6};0)$, $B(-\sqrt{6};0)$.

Facciamo riferimento alla figura Fig.1. Il solido di cui occorre calcolare il volume è descritto dalla regione piana R mentre questa ruota di un giro completo attorno all'asse y; per calcolare il volume è necessario esprimere l'equazione dell'arco VA della parabola esplicitando x in funzione di y. L'equazione richiesta è

$$x = \sqrt{6-y}, \text{ con } 0 \leq y \leq 6$$

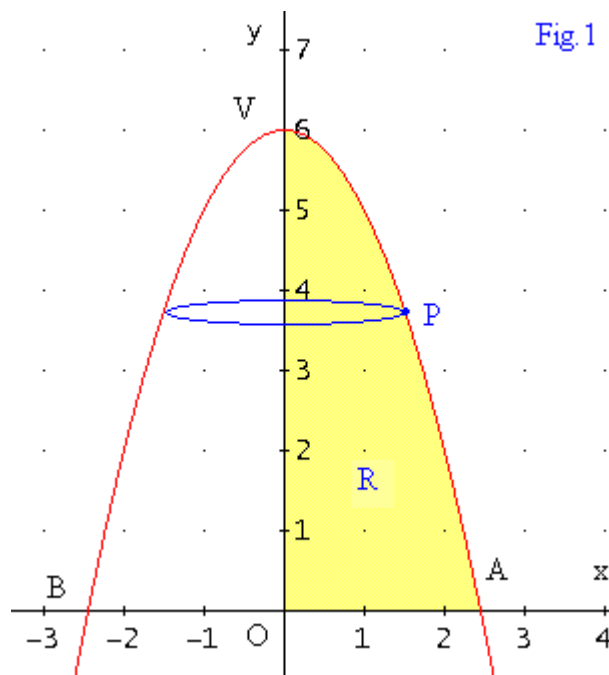
Il volume V del solido è dato dal valore del seguente integrale definito:

$$\begin{aligned} \int_0^6 \pi \cdot (\sqrt{6-y})^2 dy &= \pi \cdot \int_0^6 (6-y) dy = \\ \pi \cdot \left[6y - \frac{y^2}{2} \right]_0^6 &= \pi \cdot (36-18) = 18\pi \end{aligned}$$

2. In riferimento alla figura Fig.2 osserviamo che il solido descritto dalla regione R nella rotazione di un giro completo attorno alla retta $u: y=6$ si può ottenere come differenza tra il cilindro circolare retto descritto nella stessa rotazione dal rettangolo OAA'V ed il solido descritto dalla regione piana R' differenza tra il rettangolo OAA'V e la regione R. Indichiamo con
 V_1 il volume del cilindro circolare retto suddetto;
 V_2 il volume del solido descritto dalla regione R';
 V_3 il volume del solido richiesto.

Sia P il generico punto della parabola λ appartenente all'arco VA e P' la sua proiezione ortogonale sulla retta u. Per le coordinate dei due punti risulta

$$P(x; 6-x^2), P'(x; 6), \text{ con } 0 \leq x \leq \sqrt{6}.$$



Calcoliamo i valori dei volumi V_1, V_2, V_3 .

$$V_1 = \pi \cdot \overline{OV}^2 \cdot \overline{OA} = 36\pi \cdot \sqrt{6}$$

Per il valore V_2 facciamo presente che considerando il cilindretto elementare di raggio $P'P$ ed altezza dx , il cui volume è

$$dV = \pi \cdot \overline{P'P}^2 dx,$$

si ottiene dal calcolo dell'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{6}} dV = \pi \cdot \int_0^{\sqrt{6}} \overline{P'P}^2 dx =$$

$$\pi \cdot \int_0^{\sqrt{6}} [6 - (6 - x^2)]^2 dx = \pi \cdot \int_0^{\sqrt{6}} x^4 dx =$$

$$\pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{36}{5} \pi \sqrt{6}.$$

Il valore V_3 di conseguenza è

$$V_3 = V_1 - V_2 = 36\pi \cdot \sqrt{6} - \frac{36}{5} \pi \sqrt{6} =$$

$$\frac{144}{5} \pi \sqrt{6}$$

3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R .

Soluzione

Facciamo riferimento alla figura Fig.3.

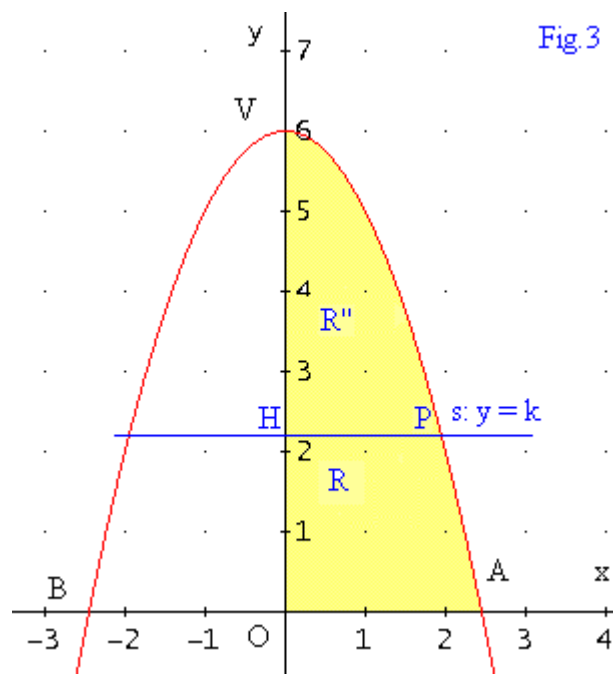
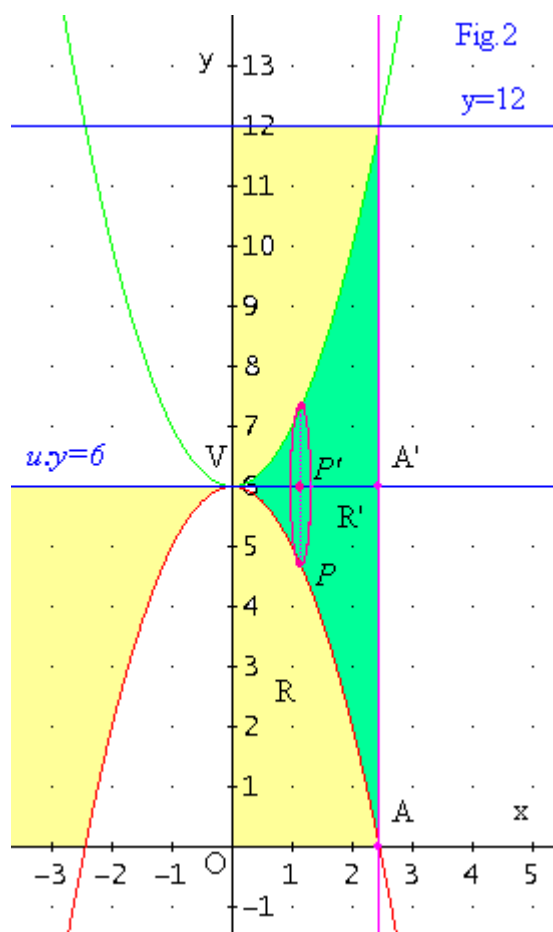
Indichiamo con H e P i due punti in cui la retta s di equazione $y=k$ taglia rispettivamente l'asse delle ordinate e l'arco VA della parabola. Evidentemente il parametro k deve verificare la doppia limitazione $0 < k < 6$ affinché la retta intersechi l'arco VA in un punto interno. La regione piana R'' delimitata dalla retta s , dall'arco VP e dall'asse delle ordinate è equiestesa alla metà della regione R . Per determinare il valore del parametro k è sufficiente trovare l'area della regione piana R , quella della regione R'' in funzione del parametro k ed uguagliarla alla metà dell'area della regione R .

Per il calcolo delle aree richieste si può utilizzare il teorema di Archimede:

“L'area di un segmento parabolico è pari ai due terzi dell'area del rettangolo circoscritto allo stesso segmento”

oppure applicare gli integrali definiti

Osserviamo che la regione R è metà del segmento parabolico determinato dall'asse delle ascisse e l'area di quest'ultimo, per il suddetto teorema, vale



$$S = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OV} = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 6 = 8\sqrt{6};$$

pertanto possiamo scrivere

$$Area(R) = \frac{1}{2} \cdot S = 4\sqrt{6}. \quad (3.1)$$

Calcolo dell'area con l'operazione di integrale definito

$$Area(R) = \int_0^{\sqrt{6}} (6 - x^2) dx = \left[6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{6}} = 6\sqrt{6} - \frac{6\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}$$

Per il calcolo dell'area della regione R'' è necessario conoscere la misura del segmento HP; troviamo perciò le coordinate dei suoi estremi.

Risulta $H(0;k)$, mentre per le coordinate di P è necessario risolvere il sistema formato dall'equazione della retta s e dall'equazione della parabola λ .

$$\begin{cases} y = k \\ y = 6 - x^2 \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = k \Rightarrow x = \sqrt{6-k} \Rightarrow P(\sqrt{6-k}; k)$$

Dalla figura si evince che

- $\overline{HP} = |x_P - x_H| = \sqrt{6-k};$
- $\overline{HV} = |y_V - y_H| = |6-k|$

Applicando ancora il teorema di Archimede ricaviamo l'area della regione R'' .

$$Area(R'') = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \overline{HP} \cdot \overline{HV} \right) = \frac{2}{3} \cdot |6-k| \sqrt{6-k}$$

Tenendo presente che $0 < k < 6 \Rightarrow 6-k > 0$ possiamo scrivere semplicemente

$$Area(R'') = \frac{2}{3} \cdot (6-k) \sqrt{6-k} = \frac{2}{3} \cdot (6-k)^{\frac{3}{2}} \quad (3.2)$$

Imponiamo ora la condizione per il valore dell'area della regione R'' tenendo conto delle relazioni (3.1), (3.2).

La condizione

$$Area(R'') = \frac{1}{2} \cdot Area(R) \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot (6-k)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$6-k = (3\sqrt{6})^{\frac{2}{3}} \Rightarrow k = 6 - (9 \cdot 6)^{\frac{1}{3}} = 6 - 3\sqrt[3]{2}$$

Conclusione- La retta s che divide la regione R in due parti equiestese è:

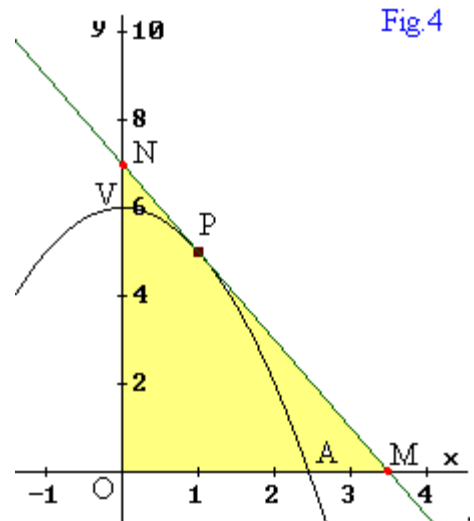
$$s: y = 6 - 3\sqrt[3]{2}$$

4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.

Soluzione

Per i valori reali del parametro t che verificano la doppia disuguaglianza $0 < t < \sqrt{6}$ indicata nel testo il

punto $P(t; 6-t^2)$ è interno all'arco della parabola di estremi V ed A. Data la regolarità della curva esiste la retta tangente nel punto P. Posto



$$f(x) = 6 - x^2$$

l'equazione cartesiana della retta tangente in P è

$$t_p : y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

e dunque, essendo $f'(t) = -2t$, dopo semplici elaborazioni si ricava

$$t_p : y = -2tx + t^2 + 6 \quad (4.1)$$

La retta t_p interseca gli assi cartesiani nei due punti $M\left(\frac{t^2+6}{2t}; 0\right)$, $N(0; t^2+6)$ che con

l'origine O determinano il triangolo OMN, la cui area è

$$S(OMN) = A(t) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OM} \cdot \overline{ON} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2+6}{2t} \cdot (t^2+6) = \frac{(t^2+6)^2}{4t}$$

Il valore dell'area del triangolo corrispondente alla posizione del punto P per $t=1$ è

$$A(1) = \frac{49}{4}.$$

5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

Soluzione

Si deve determinare il minimo della funzione $A(t)$, evidentemente con t che verifica la limitazioni imposte nel precedente punto: $0 < t < \sqrt{6}$. Vogliamo far presente che la funzione

$$A(t) = \frac{(t^2+6)^2}{4t}$$

nell'intervallo considerato è continua, ma l'intervallo non è chiuso e quindi la funzione potrebbe non ammettere minimo.

Per stabilire se esiste il minimo è necessario studiare la monotonìa, dunque occorre il segno della derivata prima. Si ha

$$A'(t) = \frac{3(t^2+6) \cdot (t^2-2)}{4t^2}$$

ed ancora, nell'intervallo considerato risulta

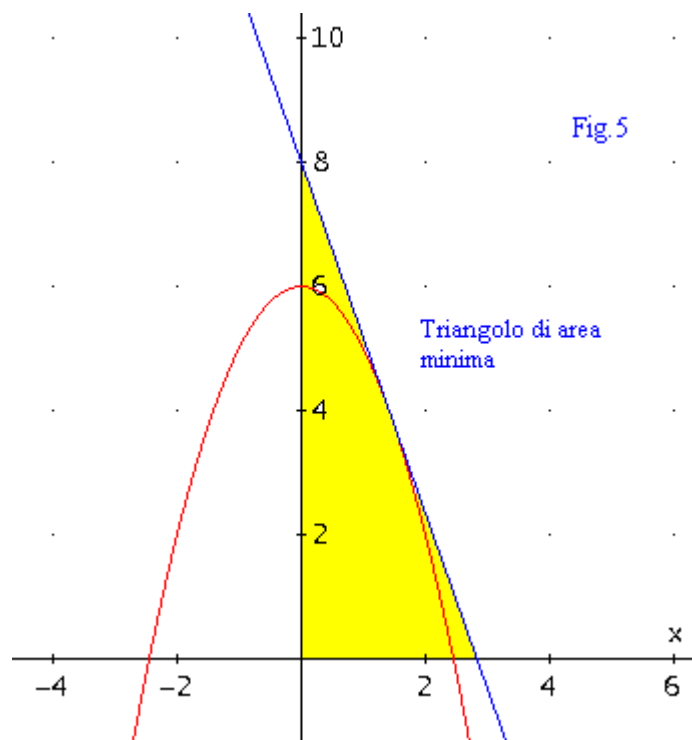
$$A'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t \leq -\sqrt{2}) \vee (t \geq \sqrt{2})$$

Limitatamente all'intervallo di variabilità per t possiamo affermare che la funzione $A(t)$ è strettamente decrescente nell'intervallo $]0; \sqrt{2}[$, strettamente

crescente nell'intervallo $]\sqrt{2}; \sqrt{6}[$ e

conseguentemente il punto $x = \sqrt{2}$ è di minimo relativo proprio e nell'intervallo considerato anche di minimo assoluto. Il valore del minimo è

$$A(\sqrt{2}) = \frac{64}{4\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$$



Commento

L'estensore del testo, nel fissare le limitazioni per la variabile t ponendo le condizioni $0 < t < \sqrt{6}$, probabilmente ha voluto evitare allo studente-candidato all'esame di Stato che il triangolo formato dalla tangente nel punto P e dagli assi coordinati degenerasse e quindi che si potesse trovare in difficoltà nello studio del problema posto. In realtà avrebbe potuto fissare le limitazioni richiedendo che risultasse $0 < t \leq \sqrt{6}$ perché con P variabile sull'arco VA della parabola λ il triangolo degenera solo quando P coincide con il vertice V , cioè per $t=0$.