Esame di Stato di Liceo Scientifico – a.s. 2004-2005

Corso di Ordinamento - Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q10

Questionario

Q10- Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x)=arctgx-arctg\dfrac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Soluzione

Cominciamo con l'osservare che la funzione proposta ha come dominio di definizione l'insieme dei numeri reali privato del punto x = -1. Quindi A=R-{-1}. La funzione è derivabile in ogni punto del dominio e ed è continua. Si richiede di determinare la derivata (prima) della funzione e di utilizzare le informazioni conseguenti per provare che la funzione in esame è costante. Faremo vedere tra breve che ciò non è vero. Cioè **la funzione non è costante in tutto il suo dominio**.

Calcolo della derivata prima

Ricordo che

- La derivata prima della funzione elementare $f(x)=arctgx$ è $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
- La derivata prima della funzione composta $f(x)=arctg\left(\varphi(x)\right)$ è $f'(x)=\dfrac{\varphi'(x)}{1+\left[\varphi(x)\right]^2}$

Ciò premesso, applicando la regola di derivazione per una funzione somma di due funzioni, si ha

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}D\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}}\cdot\frac{1(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=$$

$$\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}$$ e l'uguaglianza sussiste $\forall x \neq$-1, vale a dire in tutto il dominio della funzione. Sviluppando ulteriormente i calcoli si ricava

$$f'(x)=\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1-2(1+x^2)}{\left(1+x^2\right)\left[(x+1)^2+(x-1)^2\right]}=\frac{0}{2\left(1+x^2\right)^2}=0$$

Dunque la derivata prima della funzione è nulla in ogni punto del dominio.

Attenzione

Il fatto che la derivata prima di una funzione sia nulla in tutto il dominio della funzione non implica affatto che la funzione sia costante. Infatti sussiste un importante teorema che è conseguenza del teorema di Lagrange che riporto di seguito.

Teorema

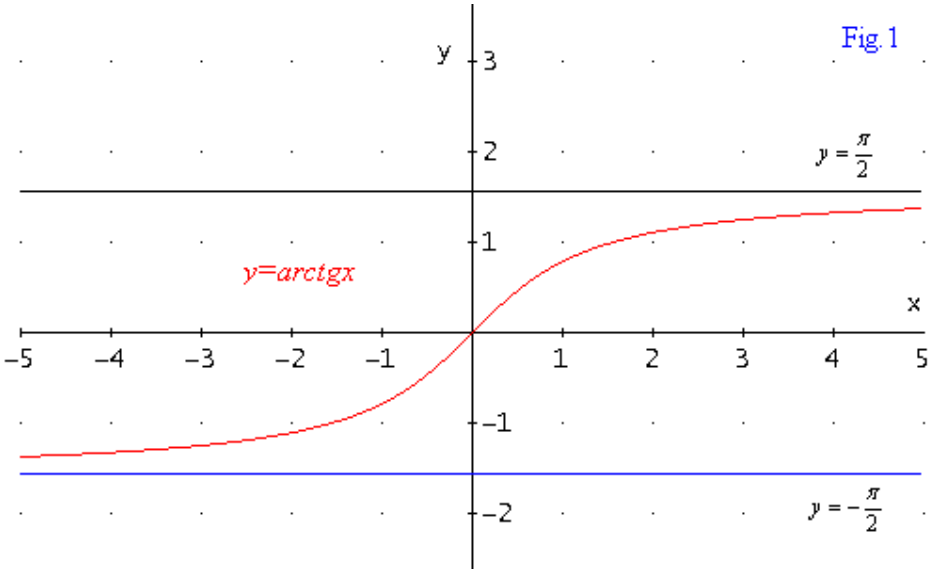
Considerata una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo $[a;b]$, se la funzione è derivabile nell'intervallo aperto $]a;b[$ e la derivata prima è nulla in ogni punto di $]a;b[$, allora la funzione è costante nell'intervallo $[a;b]$.

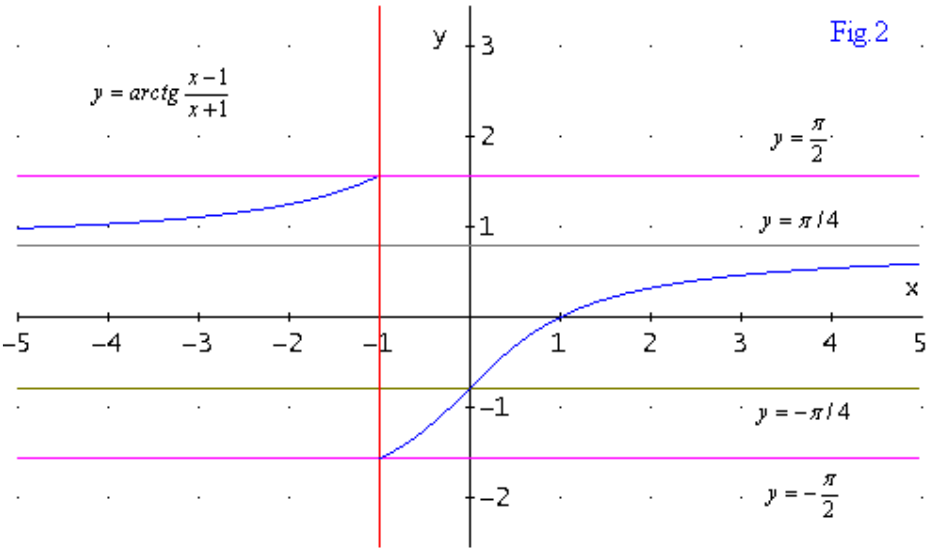
$$\begin{pmatrix} f:[a;b]\to R \\ \exists f'(x)\forall x\in\,]a;b[\\ \wedge f'(x)=0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} f \\ è..\cos\tan te \end{pmatrix}$$

Si noti che nel caso in esame la funzione non è definita in un intervallo. In virtù del teorema precedente possiamo però affermare che **la funzione è costante in ogni intervallo chiuso incluso**

nel dominio di definizione. Quindi è costante in ogni intervallo $[a;b]$ incluso in $]-\infty;-1[$ o in $]-1;+\infty[$.

Utilizzando il notissimo pacchetto applicativo Derive, riporto di seguito parzialmente i diagrammi delle funzioni $f_1(x)=arctgx$ in Fig.1, $f_2(x)=arctg\dfrac{x-1}{x+1}$ in Fig.2.





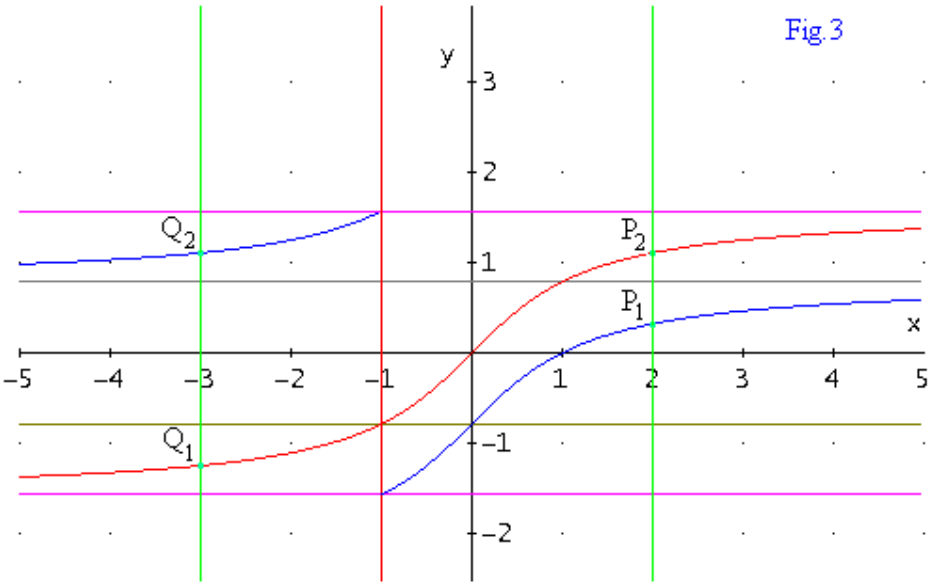
In Fig.3 sono riportati i due diagrammi precedenti. Si può notare che prendendo i punti P_1, P_2 aventi la stessa ascissa x>-1, si ha

$$y_{P_2}-y_{P_1}=f_1(x)-f_2(x);$$

come pure, prendendo i due punti Q_1, Q_2 aventi uguale valore dell'ascissa x <-1, si ha

$$y_{Q_1}-y_{Q_2}=f_1(x)-f_2(x)$$

Immediatamente ci si rende conto che risulta $y_{P_2}-y_{P_1}\neq y_{Q_1}-y_{Q_2}$ e dunque che la differenza



$f_1(x)-f_2(x)$ calcolata per diversi valori della variabile non si mantiene costante. D'altra parte è evidente che sussiste l'uguaglianza

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$$

e dunque la funzione $f(x)$ in esame non è costante.

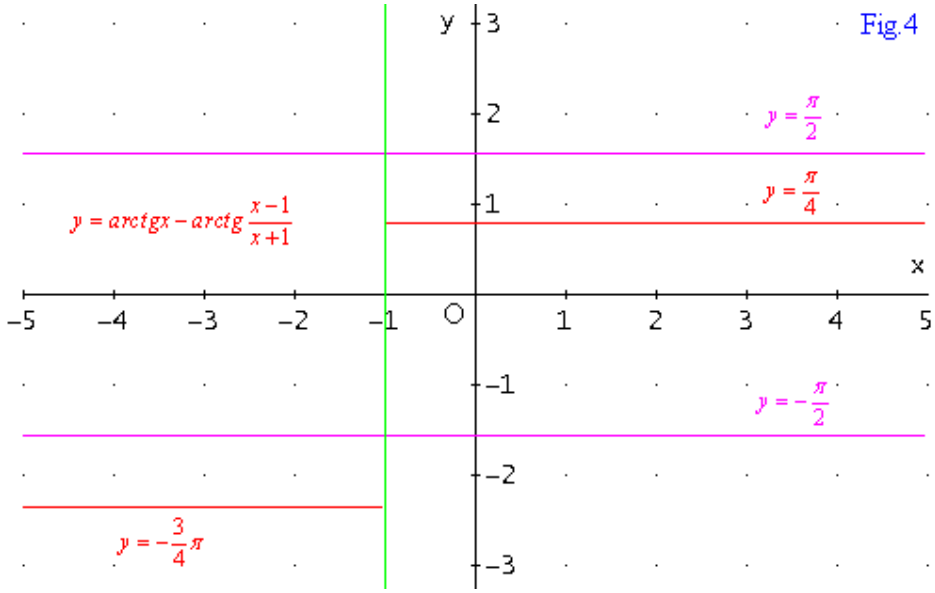
Voglio lasciare al lettore il compito di verificare che si ha

$$y_{P_2}-y_{P_1}=f_1(x)-f_2(x)=\frac{\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad y_{Q_1}-y_{Q_2}=f_1(x)-f_2(x)=-\frac{3}{4}\pi$$

facendo notare che può conseguire i risultati indicati studiando rispettivamente i due limiti

$$\lim_{x\to -1^+}\left(arctgx-arctg\frac{x-1}{x+1}\right),\ \lim_{x\to -1^-}\left(arctgx-arctg\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Riporto infine in Fig.4 il diagramma della funzione $f(x)=arctgx-arctg\dfrac{x-1}{x+1}$ di cui ci siamo occupati ; dall'andamento del grafico emerge che la stessa si mantiene costante nell'intervallo $]-\infty;-1[$, nonché nell'intervallo $]-1;+\infty[$, nei quali però assume valori diversi.



Commento

Con l'esercizio proposto probabilmente l'autore del testo pensava di offrire un esempio di funzione di variabile reale la cui forma analitica dipende chiaramente dal valore che si assegna alla variabile indipendente x ma che indagandola a fondo si sarebbe scoperto essere una funzione costante. Ha anche suggerito come giungere alla conclusione"… calcolandone la derivata (prima)…" ; ma la funzione non è costante, come ho fatto vedere.

Penso che l'esercizio sarebbe stato molto interessante se fosse stato formulato nella seguente forma "*Considerata la funzione analitica* $f(x) = arctgx - arctg\,\dfrac{x-1}{x+1}$*, il candidato determini il dominio e calcoli la derivata prima* precisando*, inoltre, se la funzione si mantiene costante in particolari intervalli di R*."