

Esame di Stato di Liceo Scientifico P.N.I. – a.s. 2004-2005
Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005 – Q5

Questionario

Q5- Come si definisce e qual è l'importanza del numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1616)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.

Soluzione

Il numero e di Nepero è di fondamentale importanza in analisi matematica. Esso è definito come il limite della successione numerica di termine generale

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ con } n \in \mathbb{N}_0$$

Con un procedimento rigoroso si dimostra che la successione indicata è strettamente crescente (dunque monotona) e limitata superiormente. Precisamente con procedimento rigoroso (non del proprio semplice) si prova che

$$\forall n \geq 2 \text{ risulta } 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

In virtù dell'esistenza del limite per ogni successione monotona si conclude che il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

esiste ed è un valore finito; questo valore è il numero di Nepero.

Avendo precisato che la successione è strettamente crescente si deduce che il numero di Nepero rappresenta l'estremo superiore della successione (non il massimo) e dunque ci si può avvicinare al valore del limite quanto si vuole purché si prendano valori per n abbastanza grandi. A titolo informativo riporto i valori di alcuni termini della successione, ciascuno dei quali rappresenta un'approssimazione per difetto del numero di Nepero.

$a_1 = 2$; a_{10} ; 2,59374246; a_{100} ; 2,70481382;
 a_{200} ; 2,71151712; a_{1000} ; 2,71692393

;
 a_{4823} ; 2,71799994; a_{4824} ; 2,71800001;
 a_{10000} ; 2,71814592

Come si può notare la successione cresce molto lentamente. Un'approssimazione abbastanza buona del numero di Nepero è

$$e = 2,71828282\dots$$

Calcolo del numero e

Per determinare il valore del numero di Nepero con una precisione stabilita, una volta acquisito che la successione che lo genera è monotona strettamente crescente, si potrebbe

Tabella n.1		Passo = 1000
Valore di riferimento per e :		2,71828182
n	$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$e - f(n)$
1	2	0,718281820
1001	2,716925288	0,001356532
2001	2,717602909	0,000678911
3001	2,717829071	0,000452749
4001	2,717942206	0,000339614
5001	2,718010104	0,000271716
6001	2,718055377	0,000226443
7001	2,718087719	0,000194101
8001	2,718111977	0,000169843
9001	2,718130845	0,000150975
10001	2,71814594	0,000135880
11001	2,718158292	0,000123528
12001	2,718168585	0,000113235
13001	2,718177295	0,000104525
14001	2,71818476	0,000097060
15001	2,718191231	0,000090589
16001	2,718196892	0,000084928
17001	2,718201888	0,000079932
18001	2,718206329	0,000075491
19001	2,718210302	0,000071518
20001	2,718213878	0,000067942
21001	2,718217113	0,000064707
22001	2,718220055	0,000061765

pensare di definire la funzione $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ed implementarla in un algoritmo iterativo, quindi avviare l'algoritmo con $n=1$, calcolare a_1 e procedere incrementando l'indice n di una unità
 $n := n+1$,
 calcolare $f(n+1)$.

Assumendo come valore di riferimento per il numero di Nepero $e=2,71828282$ si calcola la differenza $d = e - f(n)$ per osservare il grado di precisione raggiunta ad ogni passo. Il numero di zeri presenti dopo la virgola diminuito di una unità indica il numero di cifre che si sono stabilizzate nel valore approssimato (rispetto al valore di riferimento).

Un algoritmo come quello indicato può essere facilmente realizzato con un linguaggio di programmazione. Qui, però, vista la grande diffusione della multimedialità, ho riportato nella Tabella n.1 delle elaborazioni ottenute con Excel.

Osservazione

Poiché i valori della successione crescono molto lentamente, per i dati elaborati ho inserito un incremento di mille unità.

Se si vogliono ottenere elaborazioni con incrementi diversi basta aprire il foglio di lavoro e cambiare il valore nella cella che lo contiene (la cella C1 nel foglio di riferimento).

[Vai al foglio di lavoro](#)

Altre proprietà del numero e

- Un'altra caratteristica del numero di Nepero è che esso è utilizzato come base per i logaritmi naturali. Il logaritmo naturale di un numero positivo x è indicato con il simbolo $\ln(x)$, o con il simbolo $\log(x)$ e rappresenta il valore t che assegnato come esponente al numero di Nepero dà come risultato x . Insomma, l'equazione $e^t = x$, con $x > 0$, ha come soluzione il valore $t = \ln(x)$.

Chiudiamo queste riflessioni ricordando si può passare dal sistema di logaritmi in base a (con $a > 0$ e $a \neq 1$) al sistema di logaritmi in base b (con $b > 0$ e $b \neq 1$) con la seguente formula

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

nella quale deve essere $x > 0$.

- In analisi ci si riferisce spesso ai logaritmi naturali e alla funzione esponenziale avente per base il numero di Nepero perché nel calcolo di derivate o di limiti particolari le espressioni analitiche delle funzioni sono più semplici dal punto di vista formale.

o Ad esempio con $a > 0$ e $a \neq 1$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$,

mentre risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- o Per le derivate si ha:

$$D(a^x) = a^x \cdot \log a, \quad \text{mentre } D(e^x) = e^x$$

o Negli integrali indefiniti si ha $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$,

mentre risulta $\int e^x dx = e^x + c$.