M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

Quesito n.4

Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

Soluzione

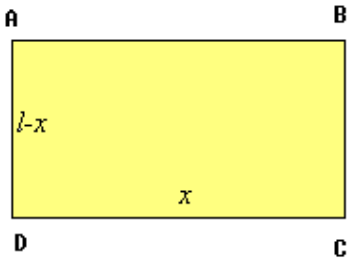
Consideriamo il rettangolo ABCD e supponiamo che il suo perimetro sia $2l$, con l costante reale positiva. Siano x ed l-x le misure delle due dimensioni. La misura dell'area del rettangolo è

$$Area(ABCD) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = x(l-x) = S(x)$$

Si deve provare che al variare di x la funzione $S(x)$ assume il massimo assoluto quando il rettangolo diventa un quadrato, quindi quando

$$\overline{AB} = \overline{BC} \Leftrightarrow x = l - x \Leftrightarrow x = \frac{l}{2}.$$

Fig.4.1



Consideriamo la funzione $S(x)$ con le ovvie limitazioni per la variabile $0 \le x \le l$.

La funzione $S(x)$ è continua e derivabile ed essendo definita in un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo assoluti per il teorema di Weierstrass. Con l'aiuto del segno della derivata prima si determina velocemente la monotonia:

$$S'(x) = l - 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{l}{2}$$

La funzione è strettamente crescente nell'intervallo $\left[0; \frac{l}{2}\right[$ e strettamente decrescente nell'intervallo $\left]\frac{l}{2}; l\right] \Rightarrow$ il punto $x = \frac{l}{2}$ è di massimo relativo proprio, nonché assoluto. La tesi è dunque acquisita.

Il valore del massimo dell'area è

$$Max = S\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}$$

Osservazione

Facciamo notare che per $x = 0$ e per $x = \frac{l}{2}$ la funzione area $S(x)$ si annulla (si tratta del valore minimo assoluto nell'intervallo considerato); in corrispondenza a detti valori una delle due dimensioni del rettangolo si riduce ad un punto ed il rettangolo degenera in un doppio segmento.