Sessione Suppletiva, Corso di Ordinamento, anno 2000

Q2- Il candidato

a) illustri il teorema di De l'Hôpital e lo applichi per dimostrare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}=0$;

b) determini i valori dei parametri m ed n in modo che risulti

$$\int_0^1 e^{mx+n}dx=\frac{e^n}{m}$$

e che l'integrale tra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente;

c) interpreti geometricamente la questione posta sopra.

Soluzione

a) Note teoriche

Il teorema di De l'Hôpital si utilizza, spesso proficuamente, nello studio di limiti che si presentano in una delle due forme indeterminate: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Più espressamente, se il limite

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta in una delle due forme $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$, allora si analizzano le situazioni seguenti.

a.1) Caso del punto x_0 reale.

Se esiste un intorno $I(x_0)$ del punto in cui le due funzioni *f*(*x*), *g*(*x*) siano derivabili in $I(x_0)-\{x_0\}$, con $g'(x)\neq 0$, ed esiste il limite del rapporto delle derivate prime delle due funzioni, allora il limite di detto rapporto coincide anche con il limite del rapporto delle funzioni. Quindi,

se esiste $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ allora esiste $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

Si noti che se il punto x_0 è di accumulazione solo a destra o solo a sinistra per il dominio della funzione rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$, il teorema continua a sussistere, semplicemente, nelle ipotesi si richiederà che esista un intorno destro $I^+(x_0)$ (rispettivamente un intorno sinistro $I^-(x_0)$) in cui le funzioni siano derivabili, con $g'(x)\neq 0$.

Se dopo aver applicato la regola di De l'Hôpital il limite $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ si presenta ancora in una delle due forme indeterminate $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$, allora si verifica se sussistono ancora le ipotesi per la sua successiva applicazione; in caso affermativo, se esiste il

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=l$$

il valore di questo sarà anche quello del limite di partenza. In definitiva, il teorema di De l'Hôpital si può applicare un numero qualsiasi di volte, purché sussistano le condizioni richieste per la sua applicazione.

a.2) Caso del punto $x_0 = +\infty$

In questo caso il punto x_0 è di accumulazione a sinistra, ma resta valido quanto detto nel caso precedente; cioè, ci si deve assicurare che le due funzioni $f(x)$, $g(x)$ siano derivabili in un intorno di $+\infty$, con $g'(x)\neq 0$; il limite da studiare è

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se questo limite esiste, il suo valore coinciderà anche con quello del limite del rapporto delle due funzioni.

a.3) Caso del punto $x_0 = -\infty$

La discussione è identica; si deve solo osservare che il punto è di accumulazione a destra.

Osservazione

Se è applicabile il teorema di De l'Hôpital, e applicandolo si conclude che il limite del rapporto delle derivate prime non esiste, non si potrà concludere che non esiste il limite di partenza; il limite in esame potrebbe esistere, ma il suo studio va affrontato con altri procedimenti.

Studio del limite proposto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$; le due funzioni presenti al numeratore e al denominatore sono derivabili su tutto l'asse reale e risulta $D\left(e^x\right)=e^x\neq 0$.

Si può applicare dunque la regola di De l'Hôpital. Sarà necessario applicarla quattro volte.

Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{e^x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^2}{e^x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{24x}{e^x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{24}{e^x}=\frac{24}{+\infty}=0^+$$

* * * * * * *

b) determini i valori dei parametri m ed n in modo che risulti

$$\int_0^1 e^{mx+n}dx=\frac{e^n}{m}$$

e che l'integrale tra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente;

Soluzione

Calcolo dell'integrale definito

$$\int_0^1 e^{mx+n}dx = \frac{1}{m}\int_0^1 me^{mx+n}dx = \frac{1}{m}\int_0^1 D\left(e^{mx+n}\right)dx = \frac{1}{m}\left[e^{mx+n}\right]_0^1 = \frac{1}{m}\left(e^{m+n} - e^{n}\right) = \frac{e^n}{m}\left(e^m - 1\right)$$

A questo punto imponiamo che il valore ottenuto per l'integrale coincida con il valore assegnato:

$$\frac{e^n}{m}\left(e^m - 1\right) = \frac{e^n}{m} \rightarrow e^m - 1 = 1 \rightarrow m = \log 2$$

Una volta determinato il valore del parametro *m* dobbiamo sfruttare la seconda condizione richiesta per determinare il valore del parametro *n*.

Deve risultare

$$\int_1^2 e^{mx+n}dx = 2\int_0^1 e^{mx+n}dx$$

Poiché si ha

$$\int_1^2 e^{mx+n}dx = \frac{1}{m}\left[e^{mx+n}\right]_1^2 = \frac{1}{m}\left(e^{2m+n} - e^{m+n}\right) = \frac{e^n}{m}\left(e^{2m} - e^m\right)$$

deve sussistere l'uguaglianza

$$\frac{e^n}{m}\left(e^{2m} - e^m\right) = 2\frac{e^n}{m}\left(e^m - 1\right) \rightarrow e^{2m} - e^m = 2\left(e^m - 1\right) \rightarrow e^{2m} - 3e^m + 2 = 0$$

Siamo pervenuti ad un'uguaglianza che non dipende dal parametro *m*. Ora, se questa'uguaglianza è verificata per $m = \log 2$, allora il problema in esame ammetterà infinite soluzioni, altrimenti non avrà alcuna soluzione.

Osserviamo che

$$e^{2m} - 3e^m + 2 = \left(e^m - 2\right)\left(e^m - 1\right)$$

e dunque, essendo $m = \log 2$, si annulla il primo fattore e l'uguaglianza è effettivamente verificata.

Concludiamo che le due proprietà richieste per la funzione integranda $f(x) = e^{mx+n}$ sono soddisfatte con $m = \log 2$ e per ogni *n* reale. Per questi valori l'espressione analitica della funzione è

$$f(x) = e^{mx+n} = e^{x\log 2}e^n = e^n \cdot 2^x$$

* * * * * * *

c) interpreti geometricamente la questione posta sopra.

Soluzione

La funzione $f(x)=e^{mx+n}$ è positiva nel suo dominio ed il fatto che con i valori dei parametri indicati sussista l'uguaglianza

$$\int_1^2 e^{mx+n}dx = 2\int_0^1 e^{mx+n}dx$$

geometricamente significa che l'area del sottografico della curva compreso tra le rette x=0, x=1 è la metà dell'area del sottografico compreso tra le rette x=1 ed x=2.

Nella figura seguente abbiamo rappresentato la funzione relativa al caso n=1: $f(x)=e\cdot 2^x$.