Sessione Suppletiva, Corso di Ordinamento, anno 2000

Q2- Il candidato

a) illustri il teorema di De l'Hôpital e lo applichi per dimostrare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}=0$;

b) determini i valori dei parametri m ed n in modo che risulti

$$\int_0^1 e^{mx+n}dx=\frac{e^n}{m}$$

e che l'integrale tra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente;

c) interpreti geometricamente la questione posta sopra.

Soluzione

a) Note teoriche

Il teorema di De l'Hôpital si utilizza, spesso proficuamente, nello studio di limiti che si presentano in una delle due forme indeterminate: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Più espressamente, se il limite

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta in una delle due forme $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$, allora si analizzano le situazioni seguenti.

a.1) Caso del punto x_0 reale.

Se esiste un intorno $I(x_0)$ del punto in cui le due funzioni $f(x)$, $g(x)$ siano derivabili in $I(x_0)-\{x_0\}$, con $g'(x)\neq 0$, ed esiste il limite …

a.2) Caso del punto $x_0 = +\infty$

…

a.3) Caso del punto $x_0 = -\infty$

…

Osservazione

…

Studio del limite proposto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$; le due funzioni presenti al numeratore e al denominatore sono derivabili su tutto l'asse reale e risulta …

b) …

$$\int_0^1 e^{mx+n}dx = \frac{e^n}{m}$$

Soluzione

Calcolo dell'integrale definito

…

Concludiamo che le due proprietà richieste per la funzione integranda $f(x) = e^{mx+n}$ sono soddisfatte con

…

* * * * * * *

c) interpreti geometricamente la questione posta sopra.

Soluzione

La funzione $f(x) = e^{mx+n}$ è positiva nel suo dominio ed il fatto che con i valori dei parametri indicati sussista l'uguaglianza

$$\int_1^2 e^{mx+n}dx = 2\int_0^1 e^{mx+n}dx$$

geometricamente significa che l'area del sottografico della curva compreso tra le rette x=0, x=1 è la metà dell'area del sottografico compreso tra le rette x=1 ed x=2.

Nella figura seguente abbiamo rappresentato la funzione relativa al caso n=1: $f(x) = e \cdot 2^x$.

…