Esame di Stato- Sessione ordinaria 2001-2002

Prova per il Liceo Scientifico di Ordinamento

Quesito n.1

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata la curva k di equazione y=*f*(*x*), dove è:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$$

a) Determinare per quali valori di *x* questa è situata nel semipiano y>0 e per quali nel semipiano y<0.
b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1.
c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.
e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione *f*(*x*) assegnata relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \le x \le 0$.

Soluzione

a) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x > -\sqrt[3]{2}$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x < -\sqrt[3]{2}$

b) La parabola richiesta ha equazione $y = ax^2 + bx + c$. Per trovare i valori dei parametri si devono imporre le seguenti condizioni

1) passaggio dall'origine degli assi $\Rightarrow$ c=0;
2) passaggio dal punto di ascissa x=-1 della curva k. Poiché *f*(-1)=3 il punto A(-1;3) è quello in oggetto ed il passaggio da detto punto implica che i coefficienti *a* e *b* verifichino la condizione

   a-b=3$\Rightarrow$ $b = a - 3$

   Con queste prime due condizioni l'equazione della parabola si riduce alla forma

   $$y = ax^2 + (a-3)x$$

3) La parabola deve tagliare ortogonalmente nel punto A la curva k e ciò equivale ad affermare che le rette tangenti alle due curve in detto punto siano tra loro perpendicolari. Ricordiamo che il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma di una funzione *y*=*f*(*x*) nel punto $(x_o; f(x_o))$, qualora nel punto x_o la funzione sia derivabile, è uguale al valore della derivata prima della funzione nel punto. D'altra parte, due rette r, r', le cui equazioni cartesiane ammettano forma esplicita

   $r: y = mx + q$, $\quad r' y = m'x + q'$

   sono perpendicolari se e solo se i coefficienti angolari sono antireciproci, cioè se verificano la relazione

   $$m \cdot m' = -1. \qquad (3.1)$$

   Ebbene la funzione *f*(*x*) è derivabile in ogni punto del dominio, quindi anche nel punto *x*=-1 e risulta

   $$f'(x) = -\frac{x^4+6x^2-4x}{\left(x^3+2\right)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(-1) = -11.$$

   Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola nel punto in questione è

   $y'(-1) = 2a(-1) + a - 3 = -a - 3$

   La condizione (3.1) diventa allora

$(-a-3)(-11)=-1 \Rightarrow \qquad a=-\dfrac{34}{11}$

L'equazione della parabola richiesta è $y=-\dfrac{34}{11}x^2-\dfrac{67}{11}x$.

c) Premesso che l'equazione della retta tangente al diagramma della funzione $y=f(x)$ nel punto $\left(x_o; f(x_o)\right)$, allorché nel punto x_o la funzione sia derivabile, è :

$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$, possiamo ricavare immediatamente l'equazione della retta tangente alla curva k nel punto A(-1;3). Si ha

$t_A: y=-11x-8$

Per stabilire se questa retta ha altri punti in comune con la curva k oltre al punto A è necessario risolvere il sistema formato dalle loro equazioni.

$\begin{cases} t_A: y=-11x-8 \\ y=\dfrac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases} \Rightarrow$ Sin ottiene come equazione risolvente:

$11x^4+8x^3+x^2+22x+18=0$

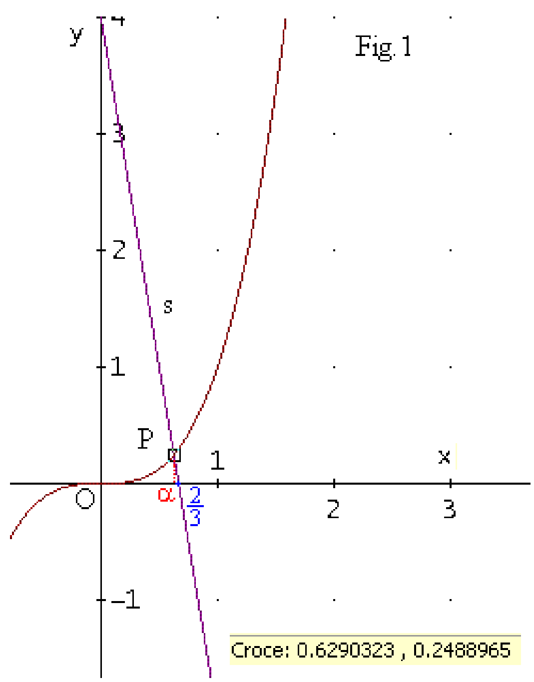
Sappiamo che x =-1 è soluzione (almeno) doppia dell'equazione ottenuta e dunque si può scomporre in fattori il polinomio al primo membro ricorrendo alla regola di Ruffini. Si ha

$(x+1)^2(11x^2-14x+18)=0$

Si verifica immediatamente che l'equazione

$11x^2-14x+18=0$

non ha soluzioni reali perché il suo discriminante è negativo $\left(\dfrac{\Delta}{4}=49-198=-149<0\right)$ e dunque si può concludere che la retta tangente in A alla curva k e la curva stessa non hanno altri punti comuni.



d) Per rispondere al quesito è sufficiente studiare gli zeri della derivata prima, quindi risolvere l'equazione seguente

$x^4+6x^2-4x=0 \iff \qquad x(x^3+6x-4)=0$

Per la legge di annullamento del prodotto uno zero è $x_1=0$. Per determinare altri punti si deve risolvere l'equazione di terzo grado

$$x^3+6x-4=0 \qquad (4.1)$$

Per questa si riconosce che ammette solo una radice reale $x=\alpha$, con $0<\alpha<\dfrac{2}{3}$. Si può pervenire a questa conclusione per via grafica. Scrivendo l'equazione nella forma equivalente

$x^3=-6x+4$

e mettendo a confronto il diagramma della cubica $\gamma: y = x^3$ con la retta s di equazione $s: y = -6x + 4$ (vedi figura Fig.1). La retta s taglia l'asse delle ascisse nel punto x=2/3 e si osserva che le due curve si intersecano nel solo punto P avente ascissa $x = \alpha$.

Nella figura, ottenuta con Derive, è evidente il quadratino in corrispondenza del punto d'intersezione delle curve e le coordinate dello stesso fornite da Derive sono (0,6290323;0,2488965); dunque 0<α=0,6290323<2/3.

Diversamente, considerando la derivata prima del polinomio

$P(x) = x^3 + 6x - 4$,

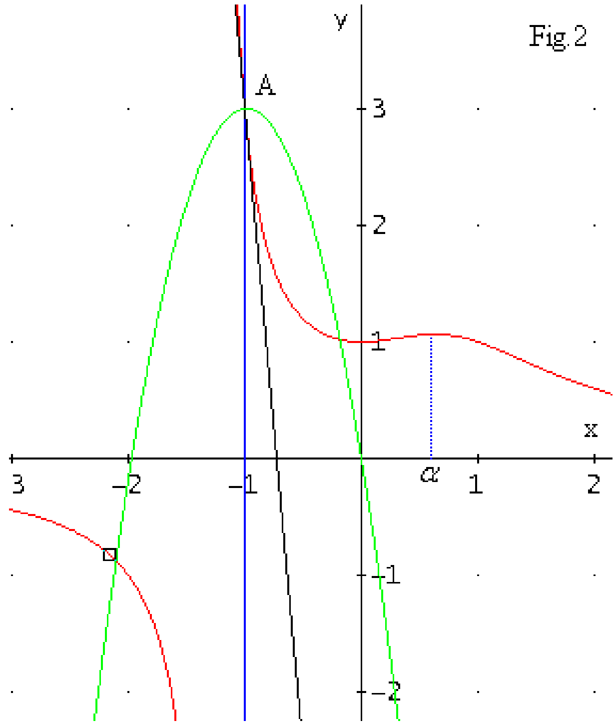
$P'(x) = 3x^2 + 6$

si osserva che assume valori strettamente positivi, dunque la funzione è strettamente crescente e poiché risulta

$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ e

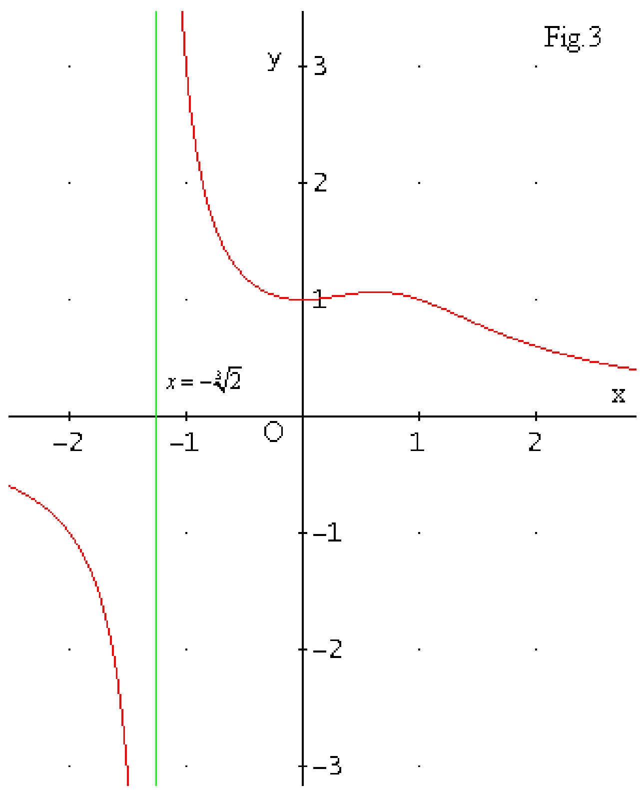
$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$

si deduce che il diagramma della funzione taglierà in un solo punto l'asse delle ascisse, proprio per $x = \alpha$.



Possiamo concludere che la derivata prima si annulla solo in due punti : $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha$ ed in corrispondenza agli stessi il diagramma della funzione ammette tangente parallela all'asse delle ascisse.

In Fig.3 è riportato parzialmente il diagramma della funzione. Si noti che la retta di equazione $x = -\sqrt[3]{2}$ è asintoto verticale sia a sinistra, sia a destra per il diagramma.



e) Enunciato del **teorema di Lagrange**

Se f è una funzione definita in un intervallo [a;b] è continua e derivabile internamente all'intervallo, allora esiste almeno un punto ***c*** **interno** all'intervallo in cui la derivata prima della funzione vale

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ebbene, notiamo che il dominio di definizione della funzione è

$D = R - \left\{-\sqrt[3]{2}\right\}$ e la stessa è continua e derivabile in ogni punto del dominio. Tuttavia l'intervallo $\left[-\sqrt{2};0\right]$ non è incluso nel dominio perché al suo interno[1] vi è il punto $-\sqrt[3]{2}$ in cui la funzione non è definita, dunque viene meno una delle ipotesi previste dal teorema di Lagrange, pertanto questo non è applicabile alla funzione.

[1] $-\sqrt{2} < -\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^6 > \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 \Leftrightarrow 8 > 4$