Esame di Stato- Sessione suppletiva 1993-1994

Prova per il Liceo Scientifico di Ordinamento

Quesito n.3

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono assegnate le curve di equazione

$$y=\frac{x-a}{2x-a}$$

dove a è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che esse hanno tutte in comune un punto A ed esso soltanto.

b) Tra le curve considerate, determinare quelle che intercettano un segmento di lunghezza $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ sulla retta passante per A e avente coefficiente angolare 3.

c) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve trovate e dalla retta di equazione x=1.

Risultati

a) A(0;1) b) $y=\frac{3x+7}{6x+7};\ y=\frac{x-3}{2x-3}$ c) $Area=\frac{7}{12}\log\frac{7}{13}+\frac{3}{4}\log 3$

Soluzione

a) **Considerazioni preliminari**

Cominciamo con l'osservare che in generale l'equazione

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{(a.1)}$$

rappresenta un'iperbole equilatera se è soddisfatta la condizione algebrica

$$ad-bc\neq 0 \qquad \text{(a.2)}$$

i cui asintoti sono

$s_1: y=\frac{a}{c}$ (asintoto orizzontale),

$s_2: cx+d=0$ (asintoto verticale).

La condizione (a.2) relativa all'equazione delle curve

$$y=\frac{x-a}{2x-a} \qquad \text{(a.3)}$$

diventa $-a+2a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$;

pertanto, la (a.3) rappresenta un'iperbole equilatera per $a\neq 0$.

Caso *a*=0

Per questo valore del parametro l'equazione diventa

$$y=\frac{x}{2x}\Rightarrow y=\frac{1}{2},\ \text{con } x\neq 0,$$

vale a dire che la curva corrispondente è la retta parallela all'asse delle ascisse avente equazione $y=\frac{1}{2}$, privata del punto $P\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Studio del caso generale ($a\neq 0$)

Notiamo che l'equazione ha senso per i valori della variabile x che verificano la condizione $2x-a\neq 0$, dunque il dominio di definizione è $D=R-\left\{\frac{a}{2}\right\}$.

Ricerca dei punti comuni delle curve (punti base del fascio)

Per i valori del dominio l'equazione si può scrivere in forma diversa. Precisamente sussistono le seguenti elaborazioni

$$y=\frac{x-a}{2x-a}\Leftrightarrow y(2x-a)=x-a\Leftrightarrow 2xy-x+a(1-y)=0 \qquad \text{(a.4)}$$

Dall'ultima forma ottenuta emerge che l'equazione delle curve è la combinazione lineare delle equazioni delle due seguenti curve

$$g_1: 2xy-x=0 \quad , \quad g_2: 1-y=0 \qquad \text{(a.5)}$$

che sono dette le curve generatrici (o curve basi del fascio).La prima è una coppia di rette, la seconda è una retta parallela all'asse delle ascisse. Se le curve g_1, g_2 hanno punti comuni questi saranno comuni a tutte le curve del fascio, cioè costituiranno i punti base dello stesso. Per stabilire se vi sono punti comuni si deve risolvere il sistema formato dalle equazioni di g_1, g_2.

$$\begin{cases}2xy-x=0\\1-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$$

Concludiamo che il fascio di curve ammette solo un punto base ed è A(0;1).

b) Strategia risolutiva

Per risolvere il quesito occorre scrivere l'equazione della retta *s* passante per A ed avente coefficiente uguale a 3 e metterla a sistema con l'equazione delle curve del fascio, in tal modo si ottiene un sistema di secondo grado che ammetterà due soluzioni, quindi si troveranno due punti P,Q, successivamente si dovrà determinare la loro distanza ed imporre che sia uguale al valore assegnato $\frac{4}{3}\sqrt{10}$. In questo modo si ricaverà un'equazione nell'incognita ***a*** che risolta fornirà i valori richiesti per il parametro.

L'equazione della retta *s* è

$s: y-y_A=3(x-x_A)\Leftrightarrow s: y=3x+1$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases}y=3x+1\\2xy-x+a(1-y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x+1\\6x^2+(1-3a)x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\y_1=1\end{cases},\ \begin{cases}x_2=\dfrac{3a-1}{6}\\y_1=\dfrac{3a+1}{2}\end{cases}.$$

I punti comuni alle due curve generatrici sono: $A(0;1)$, $B\left(\frac{3a-1}{6};\frac{3a+1}{2}\right)$

Distanza $\overline{AB}$

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3a-1}{6}\right)^2+\left(\frac{3a+1}{2}-1\right)^2}=\frac{|3a-1|}{6}\sqrt{10}$$

Imponendo la condizione

$$\overline{AB}=\frac{4}{3}\sqrt{10}\Rightarrow\frac{|3a-1|}{6}\sqrt{10}=\frac{4}{3}\sqrt{10}\Rightarrow|3a-1|=8$$

Si hanno due possibilità:

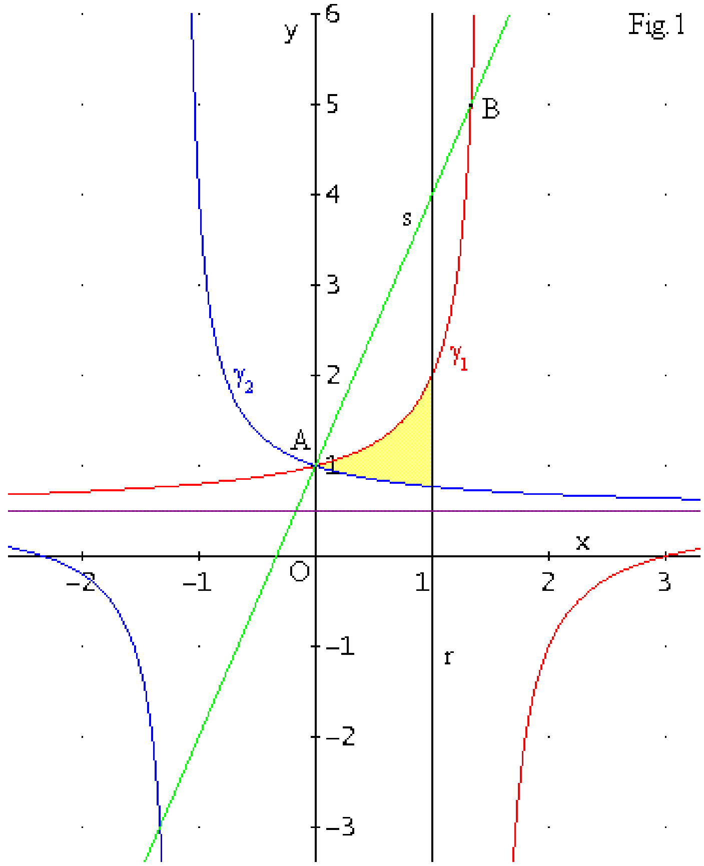
$$3a-1=8\Rightarrow a_1=3;$$

$$3a-1=-8 \Rightarrow \; a_2=-\frac{7}{3}$$

In corrispondenza ai valori trovati si hanno le equazioni:

$$\gamma_1: y=\frac{x-3}{2x-3}, \qquad \gamma_2: y=\frac{3x+7}{6x+7}$$

c) Per individuare la regione piana delimitata dalle due curve γ_1, γ_2 e dalla retta r:x=1 si devono tenere presenti i punti d'intersezione tra le due curve ed osservare come le stesse sono collocate nel piano cartesiano.



Per quanto concerne i punti comuni alle curve sappiamo già che vi è solo il punto A(0;1), per il quale abbiamo precisato che rappresenta l'unico punto base del fascio di curve al quale appartengono γ_1, γ_2 . Osservando poi la figura Fig.1 si nota che la regione finita di piano in oggetto è delimitata superiormente dalla curva γ_1 ed inferiormente dalla curva γ_2, quindi l'area della regione è il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^1\left(\frac{x-3}{2x-3}-\frac{3x+7}{6x+7}\right)dx$$

Calcolo degli integrali indefiniti

Per il calcolo dell'integrale definito è necessario procedere preliminarmente al calcolo di due integrali indefiniti.

$$I_1=\int\frac{x-3}{2x-3}dx=$$

$$\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{3}{2x-3}\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left[x-\frac{3}{2}\int\frac{2}{2x-3}dx\right]=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\log|2x-3|+c_1$$

$$I_2=\int\frac{3x+7}{6x+7}dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{7}{6x+7}\right)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{7}{6}\int\frac{6}{6x+7}dx\right]=\frac{1}{2}x+\frac{7}{12}\log|6x+7|+c_2$$

A questo punto possiamo scrivere

$$\int_0^1\left(\frac{x-3}{2x-3}-\frac{3x+7}{6x+7}\right)dx=\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\log|2x-3|\right)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{12}\log|6x+7|\right)\right]_0^1=$$

$$\left[-\frac{3}{4}\log|2x-3|-\frac{7}{12}\log|6x+7|\right]_0^1=\left(-\frac{3}{4}\log|-1|-\frac{7}{12}\log|13|\right)\text{-}\left(-\frac{3}{4}\log|-3|-\frac{7}{12}\log|7|\right)=$$

$$-\frac{7}{12}\log 13+\frac{3}{4}\log 3+\frac{7}{12}\log 7=\frac{7}{12}\log\frac{7}{13}+\frac{3}{4}\log 3$$