Parabola, Circonferenze, Triangolo mistilineo, Solido di rotazione

Problema

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p di equazione $p: y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

a) Determinare le equazioni della retta t tangente alla parabola nel suo punto C di ascissa 0 e la retta s perpendicolare alla retta t e tangente alla parabola medesima.
b) Dopo aver controllato che la parabola e la retta t si toccano nel punto A(2;1), trovare le equazioni delle circonferenze tangenti alla parabola nel punto A e tangenti alla retta t.
c) Indicata con k la circonferenza, tra quelle trovate, che non ha altri punti in comune con p, oltre ad A, e detto B il punto in cui questa circonferenza tocca la retta t, calcolare l'area della porzione di piano delimitata dal segmento BC, dal minore degli archi AB della circonferenza k e dall'arco AC della parabola p.
d) Chiamata r la retta tangente alla circonferenza k e parallela alla retta t e considerato il segmento parabolico che tale retta r individua sulla parabola p, calcolare il volume del solido da esso generato quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

Soluzione

a) Posto $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, il punto di C ha ordinata f(0)=1 →C(0;1). La retta t tangente alla parabola in C ha coefficiente angolare uguale al valore della derivata prima della funzione in x=0. Poiché $f'(x) = x - 1$, si deduce che $f'(0) = -1$. L'equazione della retta t si deduce dal modello $t: y - f(x_C) = f'(x_C)(x - x_C) \rightarrow t: y = -x + 1$.

La retta s, dovendo essere perpendicolare alla retta t, dovrà avere coefficiente angolare *m* uguale all'antireciproco del coefficiente angolare della retta t:

$m(t) = -1 \rightarrow m(s) = -\frac{1}{m(t)} = 1$ →l'equazione della retta sarà del tipo $s: y = x + q$.

Per determinare il valore del parametro q per il quale la retta s risulta tangente alla parabola si possono seguire due percorsi.

Primo- Si mette a sistema l'equazione della parabola con quella della retta s, si trova l'equazione risolvente del sistema e si impone che questa abbia radici coincidenti; la condizione è espressa dall'annullamento del discriminante dell'equazione.

Secondo- Detto T il punto di contatto tra la retta s e la parabola, con x_0 ascissa di T, la derivata prima della funzione in x_0 deve essere uguale al coefficiente angolare $m(s) = 1$. Imponendo, dunque, che $f'(x) = 1$ si determina l'ascissa del punto T. Osserviamo che l'equazione $f'(x) = 1$ risulta di primo grado ed ammette una sola radice. Questo procedimento necessita di meno calcoli rispetto al precedente, quindi più breve.

$f'(x)=1 \to\ x-1=1 \to\ x=2$. Dunque $T(2; f(2)) = T(2;1)$.

Possiamo ora trovare il valore di **q** imponendo che l'equazione della retta **s** sia soddisfatta dalle coordinate del punto T.

$s: y = x+q \to\ 1=2+q \to\ q=-1$.

L'equazione cercata è $s: y = x-1$

b) Il punto A cui si fa riferimento nel testo del problema è il punto T di contatto, dunque A(2;1), tra la retta s e la parabola.
Ricerca delle circonferenze tangenti alla parabola in A.
Per definizione due curve sono tangenti in un punto se nello stesso punto hanno la stessa retta tangente. Ciò premesso, le circonferenze che si devono determinare devono essere tangenti alla retta s nel punto a e pertanto devono avere il centro sulla perpendicolare **n** ad **s** nello stesso punto; la retta n è detta la normale alla curva in A.
Equazione della retta $n: y-y_A = -1(x-x_A) \to n: y=-x+3$.
Sia Ω il centro di una delle circonferenze da determinare. L'appartenenza alla retta **n** implica che risulti $\Omega(\alpha; 3-\alpha)$. Poiché la circonferenza deve essere tangente alla retta t, è necessario che la distanza di Ω da A sia uguale alla distanza dello stesso punto da t.

$d(\Omega;t) = \dfrac{|\alpha+3-\alpha-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; $d(\Omega;A) = \sqrt{(\alpha-2)^2+(3-\alpha-1)^2} = \sqrt{2}|\alpha-2|$

$\sqrt{2}|\alpha-2| = \sqrt{2} \to \alpha-2=\pm 1 \to \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 3$.

Si hanno due circonferenze che verificano alle condizioni richieste.
Prima circonferenza: $\alpha_1 = 1 \to \Omega_1(1;2)$,

$\alpha_2 = 1 \to \Omega_2(3;0)$. Le due circonferenze hanno raggio $r=\sqrt{2}$ e le rispettive equazioni sono:

$\lambda_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$; $\lambda_2 : (x-3)^2 + y^2 = 2$.

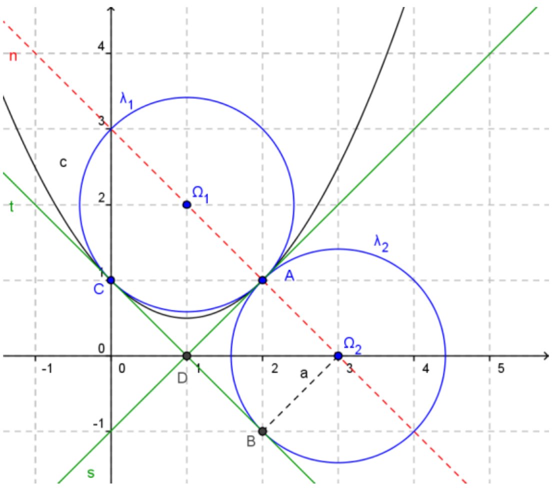

Figura 1-In figura sono rappresentati tutti gli elementi geometrici elaborati nei quesiti a), b) ,c).

c) La circonferenza indicata nel testo con k è λ_2.
Il punto comune tra λ_2 e la retta t è B(2;-1).
In Figura 1 sono riportati gli elementi geometrici elaborati fino a questo punto.
Calcolo dell'area della regione piana
In Figura 1 è indicato il punto D comune alle rette t ed s. Osserviamo che il quadrilatero ADBΩ_2 è un quadrato.
La figura piana di cui si deve trovare l'area è composta dall'unione del triangolo mistilineo ADB, ottenuto dalla differenza tra il quadrato ADBΩ_2 ed il quadrante ABΩ_2 del cerchio delimitato da λ_2, con il triangolo mistilineo ACD delimitato dall'arco AC della parabola e dai segmenti CD, AD. Quest'ultimo triangolo, a sua volta, indicato con V il vertice della

parabola, risulta essere equiesteso al doppio del triangolo CDV. Di ciò terremo conto nel calcolo dell'area di ACD.

Area del quadrato: $S_1 = a^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$;

area del settore circolare: $S_1 = \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$;

Area del triangolo mistilineo ACD:

$$S_3 = 2\int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) - (-x+1)\right)dx =$$

$$2\int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Area della regione piana richiesta

$$S = \left(S_1 - S_2\right) + S_3 = 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \frac{\pi}{2}$$

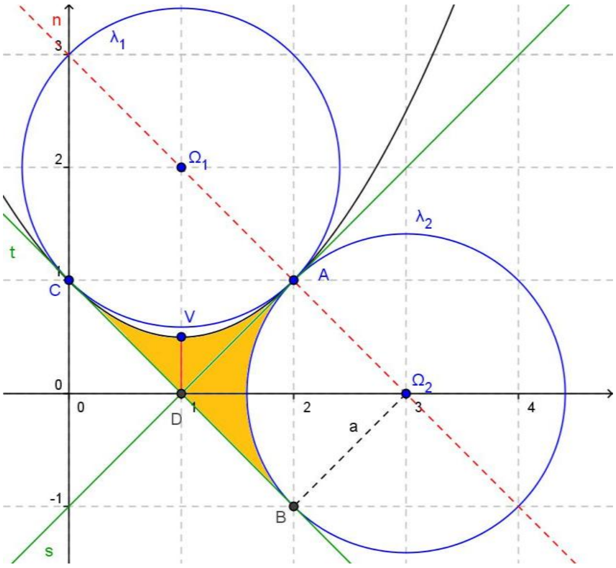

Figura 2

d) La retta r, dalla simmetria della figura, risulta essere la simmetrica della retta t rispetto alla retta n (retta dei centri delle due circonferenze). Per trovarne l'equazione si può determinare il simmetrico B' del punto B rispetto ad Ω_2 e condurre per esso la retta parallela alla retta t. Si ha:

$B'(4;1)$; $r: y = -x + 5$.

Intersezioni della retta r con la parabola

$$\begin{cases} r: y = -x + 5 \\ p: y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \end{cases} \rightarrow E\left(2\sqrt{2}; 5 - 2\sqrt{2}\right),$$

$F\left(-2\sqrt{2}; 5 + 2\sqrt{2}\right)$

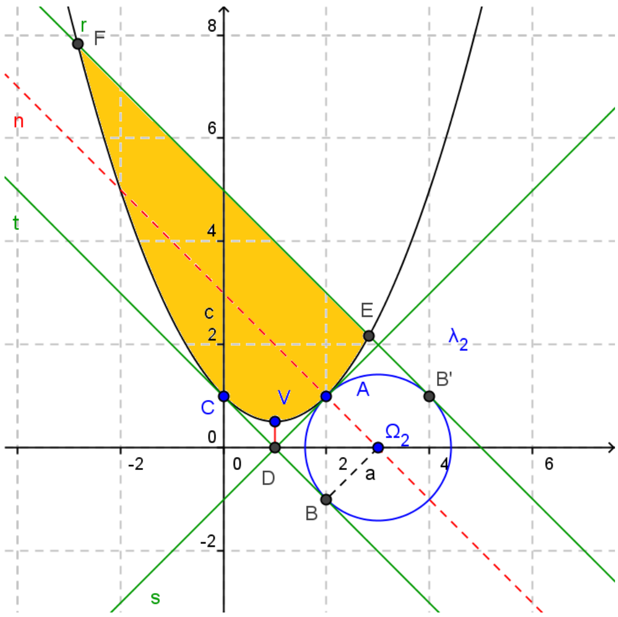

Figura 3

Il volume del solido descritto dal segmento parabolico nella rotazione indicata è il valore del seguente integrale definito:

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \pi\left[(-x+5)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)^2\right]dx$$

$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \pi\left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 - 8x + 24\right)dx =$$

$$\pi\left[-\frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 24x\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{1088\pi\sqrt{2}}{15}$$