

Liceo Scientifico Statale “G. Stampacchia”

Tricase

Tempo di lavoro 120 minuti

Oggetto: Compito in Classe 5D

Argomenti: Studio di limiti- Disequazioni esponenziali - Derivabilità -Applicazione del teorema di Lagrange. Studi di funzioni- Analisi numerica- Integrali indefiniti.

Problema_1

In relazione alla funzione $f(x) = kx^3 + hx^2$, risolvere i quesiti che seguono.

- Determinare i valori dei parametri k, h per i quali il grafico della funzione ha in $A(1;2)$ un punto critico.
- Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione.
- Detto B il punto in cui il diagramma della funzione attraversa l'asse delle ascisse, verificare che la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo avente per estremi le ascisse dei punti A e B e determinare il punto dell'intervallo che verifica la tesi del suddetto teorema.

Problema_2

In relazione alla funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, risolvere i seguenti quesiti.

- Determinare il dominio di definizione, il segno, gli eventuali zeri e dimostrare che è dispari.
- Stabilire se il diagramma ammette asintoti e determinarli in caso affermativo.
- Studiare la monotonia, la concavità e gli eventuali punti di flesso.
- Rappresentare il diagramma della funzione.
- Rappresentare nello stesso riferimento cartesiano anche la funzione $\frac{1}{f(x)}$, fornendo della stessa un grafico qualitativo, indicando le caratteristiche essenziali del diagramma agli estremi del dominio. Indicare gli eventuali asintoti e gli intervalli di monotonia.

Problema_3 (Analisi numerica)

In relazione alla funzione $f(x) = e^{-2x} - x$, risolvere i seguenti quesiti.

- Dimostrare che nel suo dominio di definizione è invertibile, precisando quali siano l'estremo superiore e quello inferiore. Determinare il codominio della funzione.
- Determinare il valore della derivata prima della funzione inversa nel punto $y_0 = f(-1)$.
- Studiare la concavità e precisare se esistono punti di flesso.
- Riconoscere che la funzione ammette un solo zero $x=\alpha$ di cui si chiede di determinare, applicando il metodo delle tangenti e/o quello delle secanti, un valore approssimato con errore inferiore a 0,01.

Integrali indefiniti

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \int \frac{x^3 - 1}{x\sqrt{x}} dx & \text{b) } \int \frac{4x^3 - 1}{2x + 1} dx & \text{c) } \int \frac{8 - x}{x^2 - x - 2} dx & \text{d) } \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx
 \end{array}$$

$$\text{e) } \int x\sqrt{5-x}dx \quad \text{f) } \int 3x\cos(x^2)dx \quad \text{g) } \int (\operatorname{tg}x - \cot gx)dx \quad \text{h) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$$

* * * * *

Quesiti

Q1- Dopo aver precisato quanti sono i numeri naturali n che soddisfano la doppia disuguaglianza

$$10^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^n < 10^4, \text{ stabilire se è possibile prevedere quanti numeri naturali } n \text{ verificano la}$$

$$\text{doppia disuguaglianza } 10^k < \left(\frac{3}{2}\right)^n < 10^{k+1}, \text{ quando sia assegnato } k > 0.$$

Q2- Dopo aver determinato il dominio di definizione, studiare la derivabilità di ciascuna delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(x) = x\sqrt{\operatorname{arcsen}x} \quad \text{b) } g(x) = \sqrt{x \cdot \operatorname{arcsen}x}$$

Q3- Studiare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\log(1+x^2)} \right)$

Q4- Studiare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2} \right)$

Q5- In relazione alla funzione $f(x) = \sqrt{6-2x^2} - 2x$

determinare il dominio, precisare il segno e gli eventuali zeri, determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo o assoluto.