26-Febbraio-2010

Liceo Scientifico Statale "G. Stampacchia"
Tricase

Tempo di lavoro
60 minuti

Oggetto: Compito in Classe 3I del 26-feb-2010
Argomenti: La parabola- fasci di parabole- Curve deducibili dalla parabola. Area di un segmento parabolico.

Es_1) Considerato in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani xOy il fascio di curve avente equazione $y^2+2(k-1)x-2ky+5k-4=0$, risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Classificare il fascio determinando le equazioni delle curve generatrici e gli eventuali punti base.

Q2- Rappresentare le curve generatrici.

Q3- Trovare le curve degeneri del fascio

Q4- Detta g la generatrice del fascio non degenere, scrivere l'equazione della retta s passante per il vertice di g e parallela alla retta 2x-2y+5=0. Determinare l'area del segmento parabolico delimitato tra g ed s.

Es_2) Curve deducibili dalla parabola
a) Dopo aver definito le condizioni di realtà per la curva di equazione
$\gamma_1 : y = 2-\sqrt{2x-1}$
Rappresentare la stessa nel piano cartesiano.
b) Rappresentare nel piano cartesiano la curva di equazione $\gamma_2 : y = x|3-x|$ e determinare l'area della regione piana finita che la stessa delimita con l'asse delle ascisse.

Es_3) Classificare i fasci di parabole le cui equazioni sono di seguito riportate indicando in particolare le equazioni delle curve generatrici, le coordinate degli eventuali punti base e le equazioni delle curve degeneri.
Rappresentare le curve di cui sono state determinate le equazioni e gli eventuali punti base.

3.1) $kx^2+x+(k-1)y-k-1=0$

3.2) $(1-k)x^2+ky+2y+2=0$

SOLUZIONE

Es_1) Considerato in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani xOy il fascio di curve avente equazione $y^2+2(k-1)x-2ky+5k-4=0$, risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Classificare il fascio determinando le equazioni delle curve generatrici e gli eventuali punti base.
Parabole tangenti in T(-3/2;1). Retta 2x-2y+5=0

Q2- Rappresentare le curve generatrici.

Q3- Trovare le curve degeneri del fascio

Q4- Detta g la generatrice del fascio non degenere, scrivere l'equazione della retta s passante per il vertice di g e parallela alla retta 2x-2y+5=0. Determinare l'area del segmento parabolico delimitato tra g ed s.

Soluzione

Q₁-

Ricerca delle equazioni delle curve generatrici del fascio.

$y^2+2(k-1)x-2ky+5k-4=0 \to y^2-2x-4+k(2x-2y+5)=0 \to$

$\lambda_1: 2x-2y+5=0$ Curva limite. Si tratta di una retta (parabola degenere).

$\lambda_2: y^2-2x-4=0$ Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse.

Intersezioni delle curve basi

$\begin{cases}\lambda_1: 2x-2y+5=0\\ \lambda_2: y^2-2x-4=0\end{cases}$ La retta e la parabola sono tangenti

nel punto $T\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$. Il fascio è composto da parabole tangenti in T e la retta tangente comune è la retta λ_1.

Q2- Le curve sono rappresentate in **Figura 1**

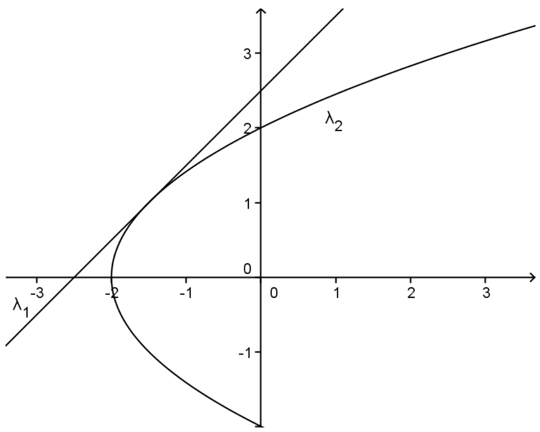

Figura 1

Q3- Abbiamo già trovato come curva degenere la retta λ_1.

Ora, osserviamo che con k=1 dall'equazione del fascio viene eliminata la presenza della variabile x e si ha:

$k=1 \to y^2-2y+1=0 \to (y-1)^2=0$

Deduciamo che la retta r:y=1 è un'altra curva degenere del fascio. La retta va considerata due volte.
Non vi sono altre curve degeneri nel fascio.
Concludiamo che il fascio contiene due curve degeneri.

Q4-Osserviamo che la retta di equazione 2x-2y+5=0 è la curva base λ_1 del fascio e che la curva generatrice non degenere è la parabola $\lambda_2: y^2-2x-4=0$. Ciò premesso, il vertice V della parabola è $V(-2;0)$ e la retta s richiesta, dovendo essere parallela alla retta λ_1 e passando per V ha equazione $s: y=x+2$.

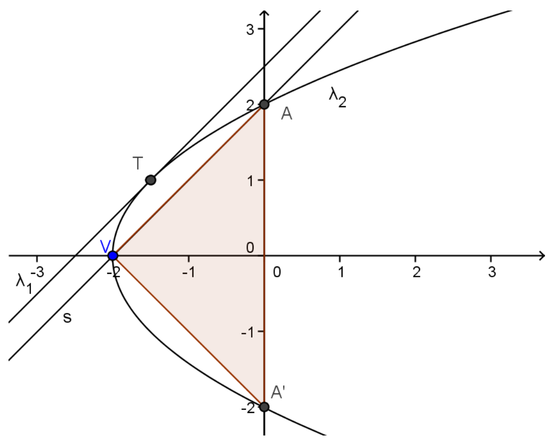

Figura 2

Calcolo dell'area del segmento parabolico.
Indichiamo cono A, A' i due punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse.

Il valore dell'area del segmento parabolico si può ottenere come la metà della differenza tra l'area del segmento parabolico determinato dalla parabola con l'asse delle ordinate e l'area del triangolo di vertici AA′V. Risulta

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2-\frac{4\cdot 2}{2}\right)=\frac{2}{3}.$$

Es_2) Curve deducibili dalla parabola

a) Dopo aver definito le condizioni di realtà per la curva di equazione

$$\lambda_1: y=2-\sqrt{2x-1}$$

Rappresentare la stessa nel piano cartesiano.

b) Rappresentare nel piano cartesiano la curva di equazione $\lambda_2: y=x|3-x|$ e determinare l'area della regione piana finita che la stessa delimita con l'asse delle ascisse.

Soluzione

a) Scrivendo l'equazione della curva nella seguente forma

$$2-y=\sqrt{2x-1}$$

si deduce che la stessa è presente nella regione del piano cartesiano i cui punti P(x;y) hanno le coordinate cartesiane che verificano entrambe le condizioni

$2x-1\geq 0$, $2-y\geq 0$.

La curva è riportata in Figura 1

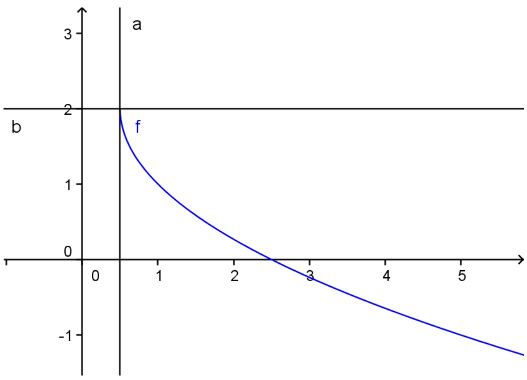

Figura 3

b) La curva di equazione λ_2 è composta da due archi appartenenti a due parabole diverse che passano entrambe per l'origine degli assi.

Per $x\leq 3$ si deve fare riferimento alla parabola di equazione

$$y=x(3-x)\rightarrow y=-x^2+3x$$

che ha per vertice il punto $V_1\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$, taglia l'asse delle ascisse nei punti (0;0) e (3;0).

Per $x>0$ si deve fare riferimento alla parabola di equazione

$$y=x(x-3)\rightarrow y=x^2-3x,$$

che ha per vertice il punto $V_2\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$, taglia l'asse delle ascisse negli stessi punti in cui l'asse intersecato è dalla precedente parabola.

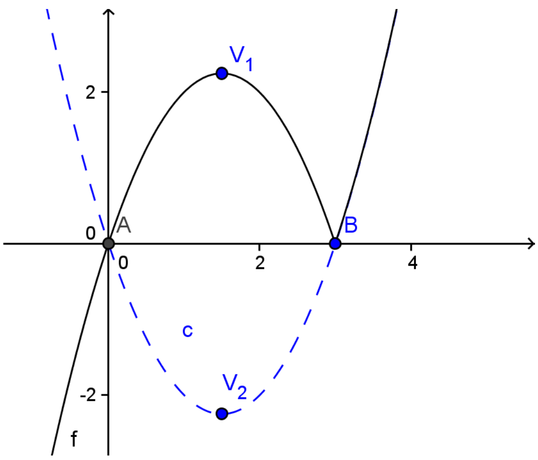

Figura 4

Calcolo dell'area del segmento parabolico

La regione piana di cui occorre calcolare l'area è il segmento parabolico definito dall'asse delle ascisse e dalla curva per $x\leq 3$; in figura il segmento parabolico ha vertice V_1 e base AB. Il valore dell'area è:

$$S=\frac{2}{3}\cdot\overline{AB}\cdot y_{V_1}=\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

Es_3) Classificare i fasci di parabole le cui equazioni sono di seguito riportate indicando in particolare le equazioni delle curve generatrici, le coordinate degli eventuali punti base e le equazioni delle curve degeneri.
Rappresentare le curve di cui sono state determinate le equazioni e gli eventuali punti base.

3.1) $kx^2+x+(k-1)y-k-1=0$

3.2) $(1-k)x^2+ky+2y+2=0$

Soluzione

3.1) Scrivendo l'equazione del fascio in modo da separare i termini contenenti il parametro k dagli altri si individuano le equazioni delle curve generatrici.

$$kx^2+x+(k-1)y-k-1=0 \rightarrow kx^2+x+ky-y-k-1=0 \rightarrow k(x^2+y-1)+x-y-1=0$$

Le equazioni delle due curve generatrici sono:

$\lambda_1 : x^2+y-1=0$, $\quad \lambda_2 : x-y-1=0$

Ricerca degli eventuali punti base

$$\begin{cases} \lambda_1 : x^2+y-1=0 \\ \lambda_2 : x-y-1=0 \end{cases} \rightarrow A(-2;-3),\ B(1;0)$$

Si tratta di un fascio di parabole secanti con A e B punti base.

Curve degeneri

La prima curva degenere è la retta $\lambda_2 : x-y-1=0$.

Ponendo k=1 nell'equazione del fascio si determina un'altra curva degenere composta da due rette parallele.

$kx^2+x+(k-1)y-k-1=0$

Con k=1 $\rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow x_1=1, x_2=-2$.

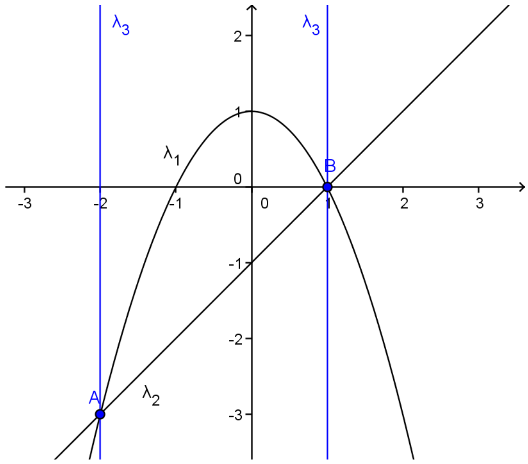

Figura 5

Il fascio ammette una seconda curva degenere composta dalle rette x=1, x=-2 la cui equazione complessiva è: $\lambda_3 : x^2+x-2=0$

3.2) Scrivendo l'equazione del fascio in modo da separare i termini contenenti il parametro k dagli altri si individuano le equazioni delle curve generatrici.

$$(1-k)x^2+ky+2y+2=0 \rightarrow x^2+2y+2+k(y-x^2)=0$$

Le **curve generatrici** del fascio sono

$\lambda_1 : x^2+2y+2=0$, $\quad \lambda_1 : y=x^2$

Il sistema delle due equazioni ottenute non ammette soluzioni reali e dunque il fascio non ha punti base.

Curve degeneri

Ponendo k=1 si ha l'equazione 3y+2=0 che rappresenta una retta, dunque è una parabola degenere.

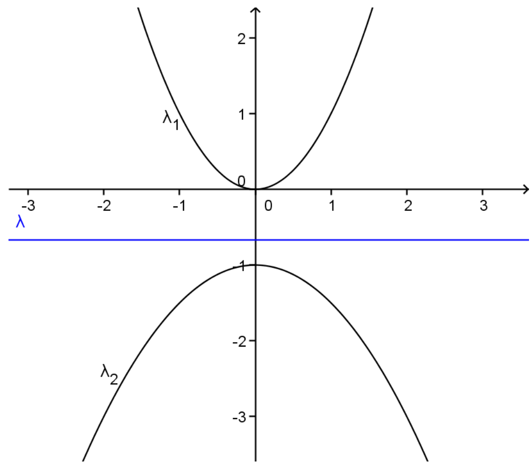

Figura 6