

Liceo Scientifico Statale "G. Stampacchia"
Tricase

Tempo di lavoro
60 minuti

Oggetto: Compito in Classe 5I

Argomenti: Numeri complessi- Dominio, segno e zeri di una funzione- Funzioni composte- Primi elementi sugli insiemi numerici.

Esercizio_1

Risolvere nel campo complesso le seguenti equazioni.

a) $z^3 + 1 - i = 0$ b) $z^6 - 4z^2 = 0$

Esercizio_2

Di ciascuna delle funzioni indicate dopo aver determinato il dominio di definizione, studiato il segno e trovati gli eventuali zeri, individuare le regioni del piano cartesiano nelle quali è presente il relativo diagramma.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{|x| + 1}$, b) $g(x) = 1 - \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$, c) $h(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{x - 1}$,

d) $k(x) = \log(2 \cos x + 1)$, per $x \in [0; 2\pi]$

Esercizio_3 (composizione di funzioni)

Relativamente alle funzioni

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2x - 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x + 1}$$

risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare le espressioni delle funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$ ed i relativi insiemi di definizione.

Q2- Calcolare

$$g(f(0)), \quad g(f(1)), \quad g(f(0,6)), \quad f(g(0,25)), \quad f(g(-1)), \quad f(g(-0,1))$$

Esercizio_4 (composizione di funzioni)

Relativamente alle funzioni

$$f(x) = -\sqrt{x+1}, \quad g(x) = 1 - x^2$$

risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare le espressioni delle funzioni $g \circ f$, $f \circ g$ ed i relativi insiemi di definizione.

Q2- Calcolare

$$f(g(-1)), \quad g(f(-1))$$

Q3- Precisare per quali valori di x ha senso l'equazione $f(g(x)) = g(f(x))$ e se ammette soluzioni.

Esercizio-5 (Insiemi numerici)

$$\text{Considerato l'insieme numerico } A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (-1 < x \leq 1) \vee \left(x = \frac{3}{2} \right) \right\}$$

determinare l'estremo inferiore e quello superiore, precisando se gli stessi sono rispettivamente il minimo ed il massimo dell'insieme.

Esercizio-6 (Insiemi numerici)

$$\text{Considerato l'insieme numerico } A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2n+3}{n+3}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ risolvere i quesiti che seguono.}$$

Q1- Determinare $x_0, x_1, x_2, x_7, x_{97}, x_{997}$

Q2- Dimostrare che per ogni n sussiste la disuguaglianza $x_n < x_{n+1}$

Q3- Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme numerico.

SOLUZIONE

Esercizio_1

Risolvere nel campo complesso le seguenti equazioni.

a) $z^3 + 1 - i = 0$

b) $z^6 - 4z^2 = 0$

Soluzione

- a) L'equazione in esame ammette come soluzioni le radici cubiche del numero complesso $(-1+i)$; formalmente i valori delle radici si indicano ponendo $z = \sqrt[3]{-1+i}$.
Si tratta di tre valori distinti; per determinarli si può scrivere il numero complesso $(-1+i)$ in forma trigonometrica:

$$-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right).$$

Ricordiamo che le radici n-sime del numero complesso $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ sono i numeri complessi $w_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$, che si ottengono con $k=0;1;2;\dots;n-1$.

Ciò premesso, le radici cubiche del numero complesso in oggetto sono:

$$w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi \right) \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi \right) \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

Approfondimento

Rappresentazione geometrica delle radici

Le radici cubiche determinate, rappresentandole sul piano di Argand-Gauss, si trovano sulla circonferenza avente il centro nell'origine degli assi e raggio $r = \sqrt[6]{2}$; precisamente sono i vertici di un triangolo equilatero.

Operatività con GeoGebra

- 1) Rappresentare la circonferenza scrivendo la sua equazione

cartesiana: $x^2 + y^2 = (\sqrt[6]{2})^2$

digitando nella barra della formula $x^2+y^2=2^{1/3}$.

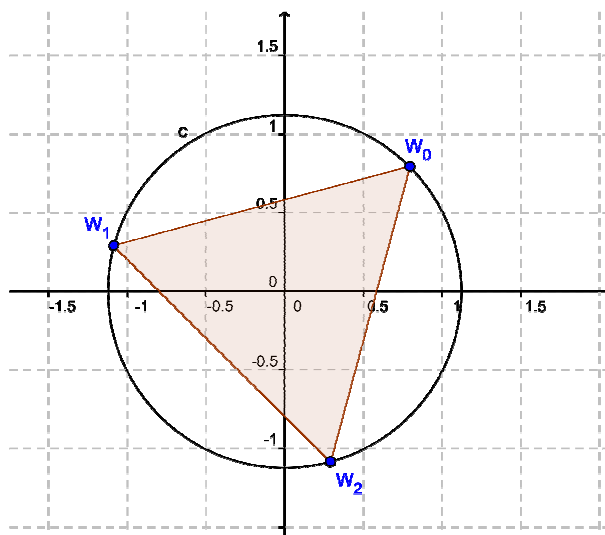
- 2) Per rappresentare il punto corrispondente alla radice w_0

digitare nella barra della formula $(2^{1/6} \cdot \cos(\pi/4), 2^{1/6} \cdot \sin(\pi/4))$;

analogamente, per rappresentare il punto corrispondente alla radice w_1 digitare nella barra della formula $(2^{1/6} \cdot \cos(11\pi/12), 2^{1/6} \cdot \sin(11\pi/12))$;
digitare, infine, $(2^{1/6} \cdot \cos(19\pi/12), 2^{1/6} \cdot \sin(19\pi/12))$, per rappresentare il punto corrispondente alla radice w_2

- b) Risoluzione dell'equazione $z^6 - 4z^2 = 0$

L'equazione è di sesto grado ed ammette sei radici.



Scomponendo il primo membro in fattori l'equazione diventa: $z^2(z^2 - 4) = 0$ ed applicando il principio dell'annullamento del prodotto si ricavano subito le due radici coincidenti $z_1 = z_2 = 0$; le altre quattro radici sono le radici quarte del numero 4.

Infatti da $z^4 - 4 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{4}$

Poiché $4 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$, le quattro radici quarte sono:

$$w_0 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{0}{4} + i \sin \frac{0}{4} \right) = \sqrt{2} (\cos 0 + i \sin 0); \quad w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right);$$

$$w_2 = \sqrt{2} (\cos \pi + i \sin \pi); \quad w_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

Esercizio_2

Di ciascuna delle funzioni indicate dopo aver determinato il dominio di definizione, studiato il segno e trovati gli eventuali zeri, individuare le regioni del piano cartesiano nelle quali è presente il relativo diagramma.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{|x| + 1}$, b) $g(x) = 1 - \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$, c) $h(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{x - 1}$,

d) $k(x) = \log(2 \cos x + 1)$, per $x \in [0; 2\pi]$

Soluzione

a) La funzione $f(x) = \frac{x^2 - 2}{|x| + 1}$ è razionale fratta; il suo dominio è tutto l'asse reale; si annulla

nei punti $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$; è negativa

nell'intervallo $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ ed è positiva

negli altri punti del dominio.

A beneficio del lettore riportiamo in **Figura 1** il diagramma della funzione.

b) La funzione $g(x) = 1 - \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$ è

un'irrazionale fratta. E' definita per i valori della variabile che verificano la disuguaglianza

$$2 - \frac{1}{x} \geq 0, \text{ che è soddisfatta nell'insieme}$$

$$A =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty[$$

Per lo studio del segno e la determinazione degli eventuali zeri si deve risolvere la seguente disequazione

$$1 - \sqrt{2 - \frac{1}{x}} \geq 0 \rightarrow \sqrt{2 - \frac{1}{x}} \leq 1, \text{ che nel dominio di definizione diventa } \frac{x-1}{x} \leq 0; \text{ quest'ultima}$$

disequazione è verificata nell'intervallo $]0; 1]$. Concludiamo che la funzione:

- si annulla per $x=1$;
- è positiva $\forall x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$;

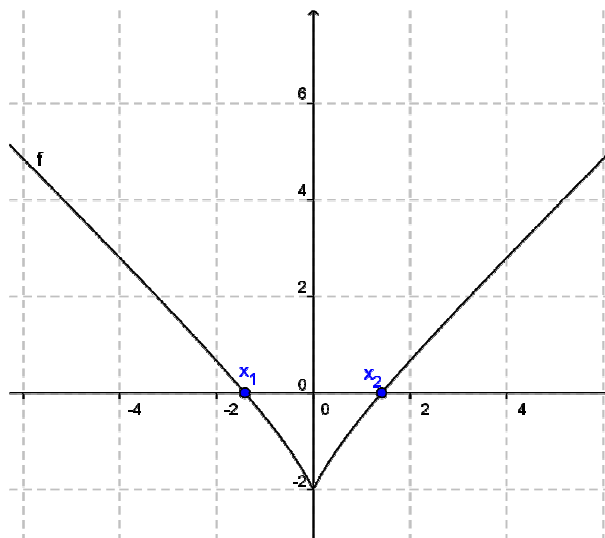


Figura 1

- è negativa negli altri punti del suo dominio.

Si può osservare il diagramma della funzione nella **Figura 2**.

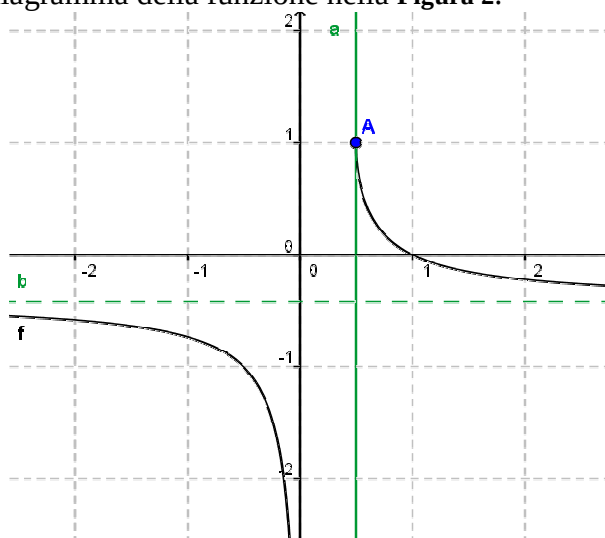


Figura 2

c) . $h(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{x-1}$

La funzione è trascendente, esponenziale, fratta. La condizione per la sua esistenza consiste nel richiedere che il denominatore sia diverso da zero. Dunque:
 $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Segno e zeri

$$e^x - 2e^{-x} \geq 0 \rightarrow e^{2x} - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \log 2;$$

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1.$$

La funzione ammette un solo zero ed è $x = \frac{1}{2} \log 2$.

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore si conclude che la funzione è negativa

nell'intervallo $\left[\frac{1}{2} \log 2; 1 \right[$, mentre è positiva in ogni

altro punto del dominio.

Si può osservare il suo diagramma in **Figura 3**.

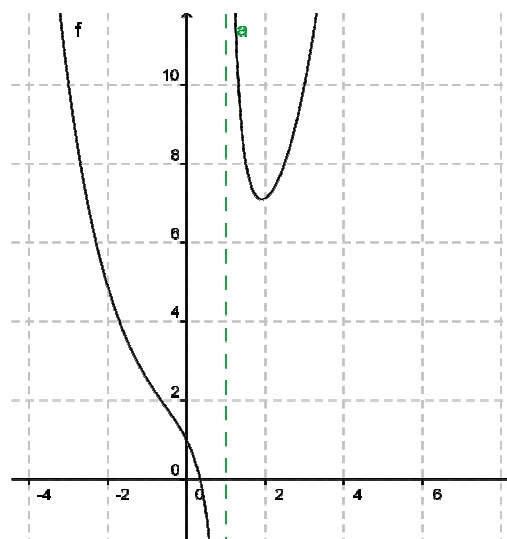


Figura 3

d) $k(x) = \log(2 \cos x + 1)$, per $x \in [0; 2\pi]$

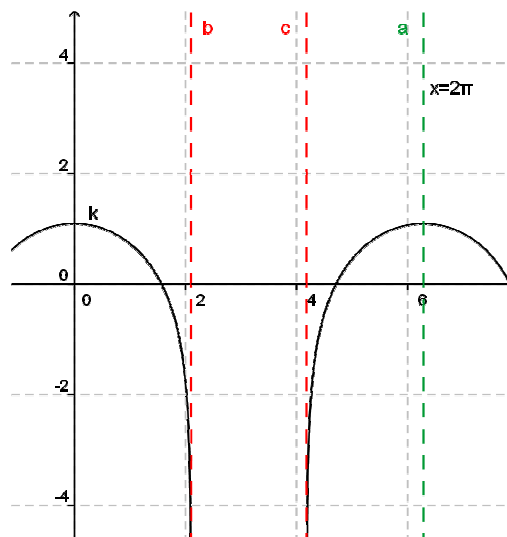
Limitatamente all'intervallo di studio assegnato, la funzione è definita per i valori della variabile che soddisfano la disequazione

$$2 \cos x + 1 > 0,$$

che è soddisfatta nell'insieme $A = \left[0; \frac{2\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{4\pi}{3}; 2\pi \right]$.

L'insieme A è il dominio della funzione.

La funzione si annulla allorché l'argomento del logaritmo vale uno, è positiva se detto argomento è maggiore di uno, è negativa per i valori della variabile che rendono l'argomento del logaritmo compreso tra



zero ed uno.

Conclusione

$$k(x) = 0 \text{ nei punti } x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2};$$

$$k(x) > 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right];$$

negli altri punti del dominio risulta $k(x) < 0$.

[Con GeoGebra](#)

Inserire nella barra della formula $y = \ln(2\cos(x)+1)$ per ottenere la rappresentazione grafica.

Esercizio_3 (Composizione di funzioni)

Relativamente alle funzioni

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare le espressioni delle funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$ ed i relativi insiemi di definizione.

Q2- Calcolare

$$g(f(0)), \quad g(f(1)), \quad g(f(0,6)), \quad f(g(0,25)), \quad f(g(-1)), \quad f(g(-0,1))$$

Risposte

$$g(f(x)) = \frac{2x-2}{2x-1}, \quad \text{Dominio } D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$$

$$g(f(0)) = 2; \quad g(f(1)) = 0; \quad g(f(0,6)) = -\frac{1}{3}$$

$$f(g(x)) = \frac{2x}{x-1}, \quad \text{Dominio } D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$f(g(0,25)) = -\frac{2}{3}; \quad f(g(-1)) \text{ non definito}; \quad f(g(-0,1)) = -\frac{2}{9}$$

Esercizio_4 (Composizione di funzioni)

Relativamente alle funzioni

$$f(x) = -\sqrt{x+1}, \quad g(x) = 1 - x^2$$

risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare le espressioni delle funzioni $g \circ f$, $f \circ g$ ed i relativi insiemi di definizione.

Risposte

$$g(f(x)) = -x, \text{ con } x \geq -1$$

$$f(g(x)) = -\sqrt{2-x^2}, \text{ con } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Q2- Calcolare

$$f(g(-1)), \quad g(f(-1))$$

Risposte

$$f(g(-1)) = -1, \quad g(f(-1)) = 1$$

Q3- Precisare per quali valori di x ha senso l'equazione $f(g(x)) = g(f(x))$ e se ammette soluzione.

Risposta L'equazione ha senso nell'insieme intersezione delle due funzioni, precisamente nell'intervallo $[-1; \sqrt{2}]$. L'equazione ammette come soluzione $x = 1$.

Esercizio-5 (Insiemi numerici)

Considerato l'insieme numerico

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (-1 < x \leq 1) \vee \left(x = \frac{3}{2} \right) \right\}$$

Determinare l'estremo inferiore e quello superiore, precisando se gli stessi sono rispettivamente il minimo ed il massimo dell'insieme.

Risposte

Estremo inferiore: $e' = -1$, che non è minimo.

Estremo superiore: $e'' = 3/2$, che è anche massimo.

Esercizio-6 (Insiemi numerici)

Considerato l'insieme numerico

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2n+3}{n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

risolvere i quesiti seguenti.

Q1- Determinare $x_0, x_1, x_2, x_7, x_{97}, x_{997}$

Q2- Dimostrare che per ogni n sussiste la disuguaglianza $x_n < x_{n+1}$

Q3- Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme numerico.

Risposte

Q1- $x_0 = 1$; $x_1 = \frac{5}{4} = 1,25$; $x_2 = \frac{7}{5} = 1,4$; $x_7 = 1,7$; $x_{97} = 1,97$; $x_{997} = 1,997$

Q2- Osserviamo che per il generico elemento dell'insieme si può scrivere

$$x_n = \frac{2n+3}{n+3} = \frac{2n+6-3}{n+3} = \frac{2(n+3)}{n+3} - \frac{3}{n+3} = 2 - \frac{3}{n+3}$$

e quindi anche

$$x_{n+1} = 2 - \frac{3}{n+4}$$

Si riconosce immediatamente che

$$2 - \frac{3}{n+3} < 2 - \frac{3}{n+4} \text{ è equivalente alla seguente } \frac{3}{n+3} > \frac{3}{n+4}, \text{ che è vera perché } \forall n \in \mathbb{N}$$

risulta

$$n+3 < n+4.$$

Q3- L'estremo inferiore è $e' = 1$, che è anche minimo, ed ancora che $e'' = 2$, che non è massimo.