Liceo Scientifico Statale "G. Stampacchia"
Tricase

Tempo di lavoro
60 minuti

Oggetto: Compito in Classe 4I dell'11-ott-2010
Argomenti: Goniometria-Funzioni goniometriche elementari -Teoremi sui triangoli rettangoli.

Es_1) In relazione agli angoli $\alpha = 21°11'12"$, $\beta = 11°10'10"$, risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare la misura dell'angolo $\gamma = \frac{3}{4}\alpha - \frac{2}{5}\beta$, riportando i calcoli necessari.

Q2- Determinare l'ampiezza del più piccolo multiplo di β che supera il triplo di α.

Q3- Determinare l'ampiezza dell'angolo α' complementare di α, l'ampiezza dell'angolo β' supplementare di β e l'ampiezza dell'angolo δ' explementare dell'angolo $\delta=\alpha'+\beta'$.

Q4- Con i simboli introdotti nei precedenti quesiti, dimostrare che indipendentemente dalle ampiezze degli angoli α e β l'ampiezza dell'angolo δ' supera di 90° quella di $\alpha+\beta$.

Es_2) Di seguito sono riportate le misure in radianti delle ampiezze di alcuni angoli; esprimere le misure degli stessi angoli nel sistema sessagesimale.

$\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $\beta = \frac{7}{8}\pi$, $\gamma = \frac{8}{5}\pi$, $\delta = \frac{11}{12}\pi$, $\eta = \frac{5}{3}\pi$, $\theta = \frac{13}{9}\pi$

Es_3) Il triangolo OAB, isoscele su AB, ha il vertice O nel centro di una circonferenza di raggio r=8,5cm ed i vertici A, B sulla stessa circonferenza. Sapendo che l'ampiezza dell'angolo in O misura $\frac{\pi}{5}(rad)$ risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare la misura della lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ della circonferenza sotteso dal lato AB del triangolo.

Q2- Calcolare il perimetro e l'area del settore circolare OAB.

Es_4)

Q1-Rappresentare nel piano cartesiano i grafici delle funzioni goniometriche $f(x) = senx$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = tgx$ limitatamente all'intervallo $[0;\pi]$.

Q2- In relazione al diagramma della funzione $f(x) = senx$, detto O il punto origine degli assi cartesiani, considerare i punti $A\left(\frac{\pi}{4}; sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $B\left(\frac{3\pi}{4}; sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, $C(\pi; sen\pi)$ e calcolare l'area di ciascuno dei due triangoli OAB, OBC.

Es_5) Servendosi della circonferenza goniometrica rappresentare gli angoli α, β, γ dei quali si sa che:

$\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $sen\beta = \frac{2}{3}$, $tg\gamma = 1,5$ e che gli angoli sono tutti acuti.

Es_6) Sapendo che $sen\alpha = 0,8$ e che $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, calcolare: $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $\sec\alpha$.

Es_7) Sapendo che $tg\alpha = 1,5$ e che $\alpha \in \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$, calcolare: $sen\alpha$, $\cos\alpha$

Es_8) Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AB misura 6cm e l'ampiezza dell'angolo nel vertice C è 60°.
Determinare le misure degli altri due lati del triangolo, la misura del perimetro e quella dell'area.

SOLUZIONE

Es_1) In relazione agli angoli $\alpha = 21°11'12''$, $\beta = 11°10'10''$, risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare la misura dell'angolo $\gamma = \frac{3}{4}\alpha - \frac{2}{5}\beta$, riportando i calcoli necessari.

Q2- Determinare l'ampiezza del più piccolo multiplo di β che supera il triplo di α.

Q3- Determinare l'ampiezza dell'angolo α′ complementare di α, l'ampiezza dell'angolo β′ supplementare di β e l'ampiezza dell'angolo δ′ explementare dell'angolo δ=α′+β′.

Q4- Con i simboli introdotti nei precedenti quesiti, dimostrare che indipendentemente dalle ampiezze degli angoli α e β l'ampiezza dell'angolo δ′ supera di 90° quella di α+β.

Soluzione

Q1- Riportiamo solo il valore dell'ampiezza dell'angolo $\gamma = \frac{3}{4}\alpha - \frac{2}{5}\beta = 11°25'20''$

Q2- Poiché $3\alpha = 63°33'36''$, il più piccolo multiplo di β che ha la proprietà richiesta è $6\beta = 66°60'60'' = 67°1'0''$

Q3- Risulta

$$\alpha' = 90° - \alpha = 90° - 21°11'12'' = 68°48'48'';$$
$$\beta' = 180° - \beta = 180° - 11°10'10'' = 168°49'50''$$
$$\delta' = 360° - (\alpha' + \beta') = 360° - 237°38'38'' = 122°21'22''$$

Q4- Osserviamo che sussistono le seguenti uguaglianze

$$\delta' = 360° - (\alpha' + \beta') = 360° - (90° - \alpha + 180° - \beta) = 90° + \alpha + \beta$$ C.V.D.

Es_2) Di seguito sono riportate le misure in radianti delle ampiezze di alcuni angoli; esprimere le misure degli stessi angoli nel sistema sessagesimale.

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi, \quad \beta = \frac{7}{8}\pi, \quad \gamma = \frac{8}{5}\pi, \quad \delta = \frac{11}{12}\pi, \quad \eta = \frac{5}{3}\pi, \quad \theta = \frac{13}{9}\pi$$

Soluzione

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi(rad) = 135°, \quad \beta = \frac{7}{8}\pi(rad) = 157°30', \quad \gamma = \frac{8}{5}\pi(rad) = 288°,$$
$$\delta = \frac{11}{12}\pi(rad) = 165°, \quad \eta = \frac{5}{3}\pi(rad) = 300°, \quad \theta = \frac{13}{9}\pi(rad) = 260°$$

Es_3) Il triangolo OAB, isoscele su AB, ha il vertice O nel centro di una circonferenza di raggio r=8,5cm ed i vertici A, B sulla stessa circonferenza. Sapendo che l'ampiezza dell'angolo in O misura $\frac{\pi}{5}(rad)$ risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare la misura della lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ della circonferenza sotteso dal lato AB del triangolo.

Q2- Calcolare il perimetro e l'area del settore circolare OAB.

Soluzione

Q1- Ricordando la definizione di misura in radianti di un angolo, in riferimento all'angolo $\alpha = A\hat{O}B$ risulta

$$\frac{l\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{r} = \alpha = \frac{\pi}{5}(rad) \rightarrow l\left(\overset{\frown}{AB}\right) = r \cdot \frac{\pi}{5}(rad) = 8,5cm \cdot \frac{\pi}{5} = 1,7\pi cm$$

Q2- La misura del perimetro del settore circolare OAB è

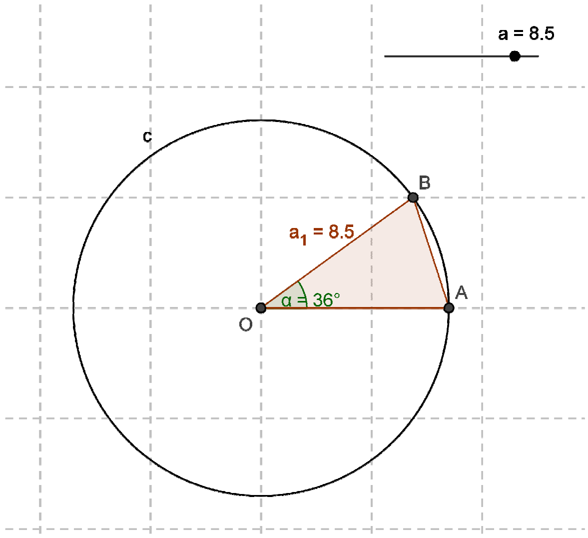
$$Perim(AOB) = 2\overline{AO} + l\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 2 \cdot 8{,}5cm + 1{,}7\pi cm = (17 + 1{,}7\pi)cm$$

Misura dell'area del settore circolare
Indicata con S l'area del settore, sappiano che il suo valore è direttamente proporzionale all'ampiezza dell'angolo al centro. Dunque sussiste la seguente proporzione

$S : \frac{\pi}{5} = area_{cerhio} : 2\pi$, da cui

$$S = \frac{\pi}{5} \cdot \pi r^2 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi r^2}{10} = \frac{\pi (8{,}5)^2}{10} cm^2 =$$

$7{,}225\pi cm^2$



Osservazione
Un modo diverso per calcolare l'area del settore circolare in oggetto è quello che utilizza l'applicazione della seguente formula:

$S(settore) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r$, essendo *l* la lunghezza dell'arco della circonferenza corrispondente al settore ed *r* il raggio di quest'ultima. Nel nostro caso risulta

$l = l\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 1{,}7\pi cm$

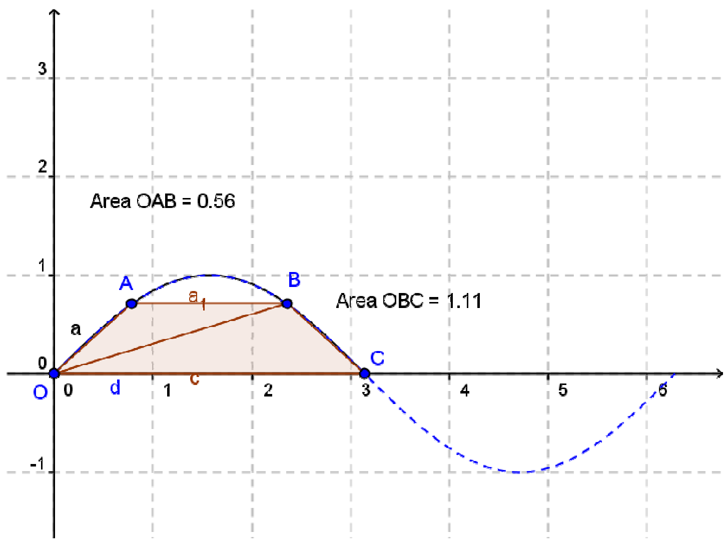
e quindi

$$S(settore) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 1{,}7\pi cm \cdot 8{,}5cm = 7{,}225\pi cm^2$$

Es_4)
Q1-Rappresentare nel piano cartesiano i grafici delle funzioni goniometriche $f(x) = senx$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = tgx$ limitatamente all'intervallo [0;π].
Q2- In relazione al diagramma della funzione $f(x) = senx$, detto O il punto origine degli assi cartesiani, considerare i punti $A\left(\frac{\pi}{4}; sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $B\left(\frac{3\pi}{4}; sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, $C(\pi; sen\pi)$ e calcolare l'area di ciascuno dei due triangoli OAB, OBC.

Soluzione

Q2- Nella figura a lato è riportato il diagramma della funzione $f(x) = senx$ con tratto continuo nell'intervallo [0;π] e con tratteggio nell'intervallo [π;2π].
Nella figura sono rappresentati i punti O, A, B, C ed i valori delle aree dei due triangoli OAB, OBC, forniti con approssimazione al centesimo.



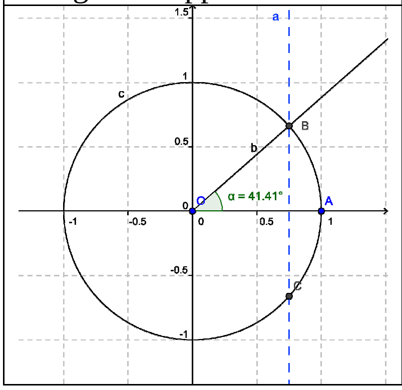
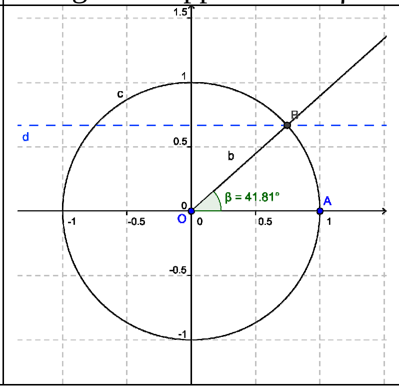
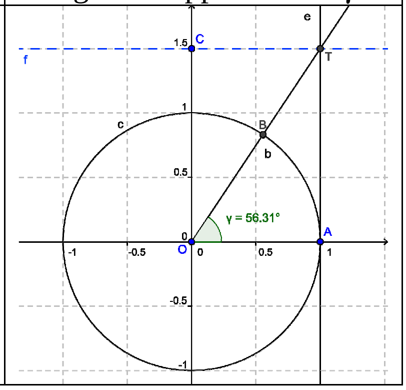
Operatività con GeoGebra
1)Introduzione delle equazioni parametriche della funzione *f*(*x*)=sen*x* per l'intervallo [0;π].
Comando: curva[t,sin(t),t,0,π]

2) Inserimento delle coordinate dei punti O, A, B, C
Punto O: (0,0)
Punto A: (π/4,sin(π/4))
Punto B: (3π/4,sin(3π/4))
Punto C: (π,sin(π))

Es_5) Servendosi della circonferenza goniometrica rappresentare gli angoli α, β, γ dei quali si sa che:

$$\cos\alpha = \frac{3}{4},\ sen\beta = \frac{2}{3},\ tg\gamma = 1,5$$ e che gli angoli sono tutti acuti.

Soluzione

In figura è rappresentato α	In figura è rappresentato β	In figura è rappresentato γ
		

Es_6) Sapendo che $sen\alpha = 0,8$ e che $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, calcolare: $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $\sec\alpha$.

Soluzione

Dalle relazioni tra le funzioni goniometriche per uno stesso angolo, tenendo conto dell'ampiezza dell'angolo α, si ha:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-sen^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{8}{10}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5};$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5}:\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}; \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{5}{3}$$

Es_7) Sapendo che $tg\alpha = 1,5$ e che $\alpha \in \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$, calcolare: $sen\alpha$, $\cos\alpha$

Soluzione

Dalle relazioni tra le funzioni goniometriche per uno stesso angolo, tenendo conto dell'ampiezza dell'angolo α, si ha:

$$sen\alpha = \frac{tg\alpha}{-\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1,5}{-\sqrt{1+(1,5)^2}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

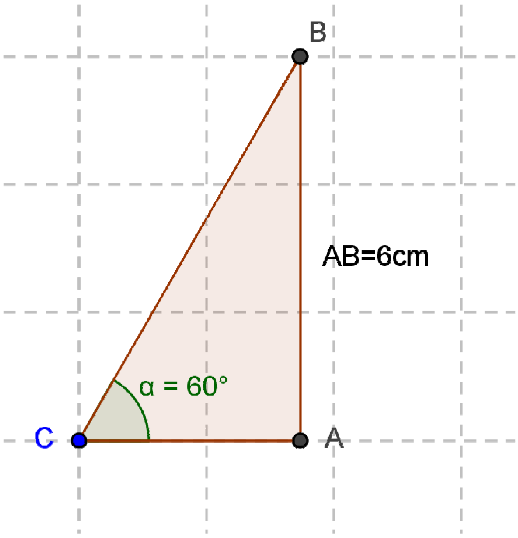
$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{-\sqrt{1+(1,5)^2}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Es_8) Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AB misura 6cm e l'ampiezza dell'angolo nel vertice C è 60°.
Determinare le misure degli altri due lati del triangolo, la misura del perimetro e quella dell'area.

Soluzione

Con $\overline{AB} = 6cm$, tenendo presenti i teoremi sui triangoli rettangoli si ha:

$\overline{BC} = \dfrac{\overline{AB}}{sen 60°} = 4\sqrt{3}cm$, $\overline{AC} = \dfrac{1}{2}\overline{BC} = 2\sqrt{3}cm$



Perimetro del triangolo

$2P(ABC) = 6\left(1+\sqrt{3}\right)cm$

Area del triangolo

$Area(ABC) = 6\sqrt{3}cm^2$