Accertamento delle competenze in uscita dalla seconda classe del Liceo Scientifico

Algebra

Es_1- Determinare le soluzioni della seguente disequazione

$$\frac{|4-x|-1}{x^2-|x|}>0$$

Es_2- Risolvere le seguenti equazioni:

2.1 $\left(2x^2-3x\right)^2-3\left(2x^2-3x\right)-10=0$

2.2 $\sqrt{x^2-3x+6}=3x-4$

*** ***

Geometria

Dato il rettangolo ABCD, con $\overline{AB}=a>0$, $\overline{AD}=b>0$, prolungare il lato AB dalla parte di B del segmento BE di misura x ed il lato AD, dalla parte di D, del segmento DF di misura y in modo che i punti E,C,F siano allineati. Stabilire per quali valori di x ed y il triangolo rettangolo EAF ha area doppia del rettangolo ABCD.

Elaborazioni

Algebra

Es_1 Disequazione

$$\frac{|4-x|-1}{x^2-|x|}>0$$

Le soluzioni della disequazione sono i punti dell'insieme

$S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;3\right[\cup\left]5;+\infty\right[$

Es_2

2.1) L'equazione è trinomia e si risolve introducendo una variabile ausiliaria. Ponendo $2x^2-3x=t$ si perviene all'equazione

$t^2-3t-10=0$ che ammette come radici $t_1=-2$; $t_2=5$.

Si devono a questo punto risolvere le ulteriori equazioni di secondo grado che si ottengono ritornando alla variabile x.

a) Con $t_1=-2$ si ha l'equazione

$2x^2-3x+2=0$ che ha come soluzioni $x=\frac{3\pm i\sqrt{7}}{4}$;

b) Con $t_2=5$ si ha l'equazione

$2x^2-3x-5=0$ che ha come soluzioni $x_3=-1$; $x_4=\frac{5}{2}$

*** ***

2.2) L'equazione proposta è irrazionale intera.

$$\sqrt{x^2-3x+6}=3x-4$$

La condizione di esistenza (C.d.E.) per l'equazione è

$$x^2-3x+6\geq 0$$

Il discriminante del trinomio è negativo, dunque il trinomio assume valore positivo $\forall x\in\mathbb{R}$.
L'equazione in esame è equivalente al seguente sistema misto:

$$\begin{cases}3x-4\geq 0\\ x^2-3x+6=(3x-4)^2\end{cases}$$

Sviluppando il quadrato e riducendo alla forma normale l'equazione si ricava

$$8x^2-21x+10=0$$

che ammette come radici: $x_1=2$, $x_2=\frac{5}{8}$.

Delle due radici solo la prima verifica la disuguaglianza $3x-4\geq 0$ e quindi è accettabile come soluzione dell'equazione irrazionale; la seconda radice va scartata. Concludiamo che l'equazione irrazionale ammette solo la soluzione $x_1=2$.

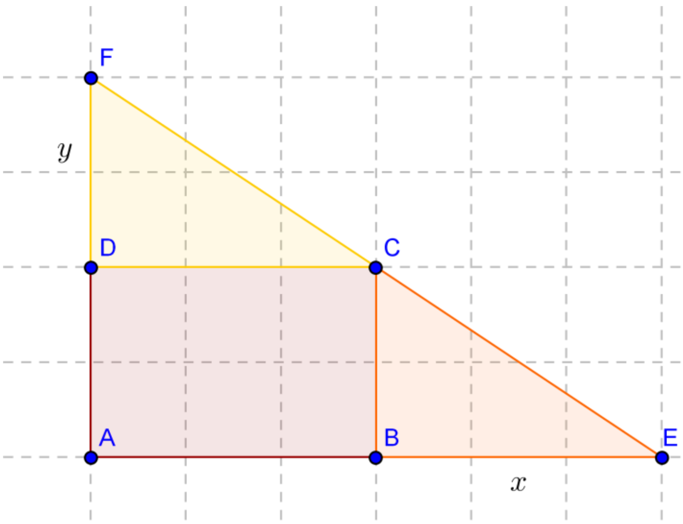
Geometria

Poiché i punti E, C, F sono allineati i triangoli BCE, CDF (nonché EAF) sono simili e quindi sussiste l'uguaglianza dei seguenti rapporti:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DC}}$$

da cui $\frac{b}{x}=\frac{y}{a}$, quindi si ricava l'uguaglianza

$$xy=ab.$$



Calcolando l'area del triangolo rettangolo EAF ed uguagliandola al doppio dell'area del rettangolo ABCD di ottiene una seconda equazione nelle incognite *x*, *y*:

$$(a+x)(b+y)=4ab.$$

I valori delle incognite *x*, *y* si ricavano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases}xy=ab\\ (a+x)(b+y)=4ab\end{cases}$$

Dopo semplici elaborazioni algebriche si ricava: $x = a$; $y = b$.