Liceo Scientifico Statale “G. Stampacchia”
Tricase

Tempo di lavoro
120 minuti

Oggetto: Test di ingresso
Conoscenze e competenze sul programma previsto nella classe seconda del Liceo Scientifico.

Algebra

Q1) Ordinare in forma crescente i seguenti valori numerici: $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{9}$, $2\sqrt{2}$

Q2) Scrivere un’equazione di secondo grado avente come radici i valori x_1=-3, x_2=1/3 e ridurla alla forma normale.

Q3) Scrivere un’equazione biquadratica avente tra le sue radici i valori x_1=-1, $x_2=\sqrt{3}$.

Q4) Considerato il numero positivo $n=2-\sqrt{3}$, trovare il numero positivo x che verifica l’uguaglianza $x^2=\frac{4}{n}$.

Q5) Risolvere le seguenti equazioni

5.1 $(x-1)^2=9$ 5.2 $x+\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}=0$ 5.3 $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{2}{x^2-9}=\dfrac{1}{2}$

Q6) Nell’equazione parametrica $\sqrt{5}x^2-x+k=0$, determinare il valore di k per il quale una radice dell’equazione è $x_1=\sqrt{5}$, successivamente scrivere l’equazione corrispondente e, sfruttando le note relazioni tra i coefficienti di un’equazione di secondo grado e le sue radici, determinare il valore della seconda radice.

Q7) In relazione all’equazione parametrica $kx^2+x-k-1=0$, con k≠0, risolvere i quesiti che seguono.

7.1 Stabilire per quali valori di k le radici dell’equazione sono coincidenti e determinare i corrispondenti valori.

7.2 Stabilire per quali valori di k le due radici sono discordi.

Q8) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

8.1 $\begin{cases} 2x+y=3 \\ (2x-y)^2=4 \end{cases}$ 8.2 $\begin{cases} 2\left(x-\sqrt{3}y\right)=1 \\ x^2-\sqrt{3}xy=0 \end{cases}$

Q9) Risolvere la disequazione ed il sistema di disequazioni che seguono:

9.1 $\frac{1}{2}x<\dfrac{1}{x-1}$ 9.2 $\begin{cases} x^2-1>0 \\ |x|-2\le 0 \end{cases}$

Geometria Piana

G1) Le diagonali di un rombo sono l’una i ¾ dell’altra.

1.1 Indicata con d la misura della diagonale maggiore, esprimere in funzione di d le misure del perimetro, dell’area del rombo e dell’area del cerchio inscritto nello stesso.

1.2 Determinare i valori delle grandezze indicate nel precedente punto con d=12cm.

G2) Le corde AB, CD di una circonferenza di centro O sono tra loro parallele, disposte da parti opposte rispetto al centro O e misurano rispettivamente $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}$.

2.1 Precisare che tipo di quadrilatero è il quadrilatero convesso ABCD.

2.2 Determinare le misure delle distanze delle corde AB, CD dal centro della circonferenza in funzione della misura del raggio.

2.3 Determinare la misura dell’area e le ampiezze degli angoli del quadrilatero ABCD.

Soluzione

Algebra

Q1) Ordinare in forma crescente i seguenti valori numerici: $\sqrt[3]{9}, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}$

Soluzione

Osserviamo che i tre numeri assegnati sono positivi e si ha:

$\sqrt{5} < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 < \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 5 < 8$ disuguaglianza vera;

$\sqrt[3]{9} < \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{9}\right)^6 < \left(\sqrt{5}\right)^6 \Leftrightarrow 81 < 125$ disuguaglianza vera

Dalle precedenti disuguaglianze si deduce che $\sqrt[3]{9} < \sqrt{5} < 2\sqrt{2}$.

Q2) Scrivere un'equazione di secondo grado avente come radici i valori x_1=-3, x_2=1/3 e ridurla alla forma normale.

Soluzione

Un'equazione avente le caratteristiche indicate è la seguente: $(x+3)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$, che ridotta alla forma normale diventa $3x^2+8x-3=0$.

Q3) Scrivere un'equazione biquadratica avente tra le sue radici i valori x_1=-1, $x_2=\sqrt{3}$.

Soluzione

Ricordiamo che un'equazione biquadratica è di quarto grado ed ha la seguente forma: $ax^4+bx^2+c=0$. Una tale equazione nel campo complesso ammette quattro radici che sono a due a due opposte. Poiché due delle radici sono i valori x_1=-1, $x_2=\sqrt{3}$, le altre due radici saranno x_3=-x_1=1, $x_4=-x_2=-\sqrt{3}$. Scriviamo un'equazione che ha i precedenti valori come radici.

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0 \to (x+1)\left(x-\sqrt{3}\right)(x-1)\left(x+\sqrt{3}\right)=0 \to x^4-4x^2+3=0$$

Q4) Considerato il numero positivo $n=2-\sqrt{3}$, trovare l numero positivo x che verifica l'uguaglianza $x^2=\frac{4}{n}$.

Soluzione

Il numero richiesto è

$$x=\sqrt{\frac{4}{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Il radicale doppio che figura nell'espressione è sviluppabile e si ha

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

Pertanto il numero x richiesto è $x=2\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Q5) Risolvere le seguenti equazioni

5.1 $(x-1)^2=9$ 5.2 $x+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=0$ 5.3 $\frac{x}{x+3}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{1}{2}$

Soluzione

5.1 $(x-1)^2=9 \to x-1=\pm 3 \to x_1=-2, x_2=4$

5.2 $x+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=0$ L'equazione ha senso per $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

Elaborando e semplificando l'espressione nel dominio di definizione indicato si ha:

$x+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=0 \rightarrow x+\frac{x}{x-1}=0 \rightarrow x^2=0$, quest'equazione è soddisfatta solo per x=0, ma questo valore non appartiene al dominio di definizione, dunque l'equazione in esame non ha soluzioni e quindi è impossibile.

5.3 $\frac{x}{x+3}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{1}{2}$

Il dominio di definizione dell'equazione è $D=R-\{-3;3\}$.

Elaborando l'equazione si ha

$$\frac{2x(x-3)-4-(x^2-9)}{2(x+3)(x-3)}=0 \rightarrow x^2-6x+5=0 \rightarrow x_1=1, x_2=5$$

I valori trovati sono accettabili come soluzioni dell'equazione perché appartengono al suo dominio di definizione.

Q6) Nell'equazione parametrica $\sqrt{5}x^2-x+k=0$, determinare il valore di k per il quale una radice dell'equazione è $x_1=\sqrt{5}$, successivamente scrivere l'equazione corrispondente e, sfruttando le note relazioni tra i coefficienti di un'equazione di secondo grado e le sue radici, determinare il valore della seconda radice.

Soluzione

Si ricava il valore del parametro applicando la definizione di radice di un'equazione, imponendo, cioè, che il valore $\sqrt{5}$ soddisfi l'equazione. Si ha

$$\sqrt{5}x^2-x+k=0 \rightarrow \sqrt{5}\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}+k=0 \rightarrow k=-4\sqrt{5}$$

L'equazione richiesta è: $\sqrt{5}x^2-x-4\sqrt{5}=0$

Per trovare la seconda radice utilizziamo la relazione tra i coefficienti dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ ed il prodotto delle radici della stessa. Avendosi

$$x_1 \cdot x_2=p=\frac{c}{a}=\frac{-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \rightarrow x_2=\frac{-4}{\sqrt{5}}=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Q7) In relazione all'equazione parametrica $kx^2+x-k-1=0$, con k≠0, risolvere i quesiti che seguono.

7.1 Stabilire per quali valori di *k* le radici dell'equazione sono coincidenti e determinare i corrispondenti valori.

7.2 Stabilire per quali valori di *k* le due radici sono discordi.

Soluzione

7.1 Un'equazione di secondo grado ha le radici coincidenti se e solo se il suo discriminante è nullo. Dunque deve essere:

$$\Delta=1-4k(-k-1)=0 \rightarrow 4k^2+4k+1=0 \rightarrow (2k+1)^2=0 \rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

L'equazione che ammette le radici coincidenti è:

$-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}-1=0 \rightarrow x^2-2x+1=0$ le cui radici sono $x_1=x_2=1$.

7.2 Poiché le radici devono essere discordi necessariamente devono essere reali e dunque il discriminante dell'equazione deve essere non negativo. Risultando $\Delta = (2k+1)^2$ si deduce immediatamente che $\forall k \in R$ la condizione è verificata.
Osserviamo ora che due numeri reali sono discordi se e solo se il loro prodotto è negativo.
Ciò premesso, tenendo presente la relazione esistente tra i coefficienti di un'equazione di secondo grado ed il prodotto delle relative radici, cioè

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

deduciamo che nel caso in esame il parametro k deve verificare la seguente disequazione:
$\frac{-k-1}{k} < 0$ La disequazione è soddisfatta per $(k < -1) \vee (k > 0)$.

Q8) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

8.1 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ (2x-y)^2 = 4 \end{cases}$ 8.2 $\begin{cases} 2\left(x - \sqrt{3}y\right) = 1 \\ x^2 - \sqrt{3}xy = 0 \end{cases}$

Soluzione

8.1 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ (2x-y)^2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = \pm 2 \end{cases}$

Il sistema è equivalente all'unione logica di due sistemi:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ la cui soluzione è $x = \frac{5}{4}; y = \frac{1}{2};$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$ la cui soluzione è $x = \frac{1}{4}; y = \frac{5}{2}$

Le soluzioni del sistema sono perciò le coppie ordinate: $\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{5}{2}\right)$.

8.2 $\begin{cases} 2\left(x - \sqrt{3}y\right) = 1 \\ x^2 - \sqrt{3}xy = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x - \sqrt{3y} = \frac{1}{2} \\ x\left(x - \sqrt{3y}\right) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \\ x = 0 \end{cases}$ Il sistema ammette una sola soluzione ed è la coppia ordinata $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Q9) Risolvere la disequazione ed il sistema di disequazioni che seguono:

9.1 $\frac{1}{2}x < \frac{1}{x-1}$ 9.2 $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ |x| - 2 \le 0 \end{cases}$

Sintesi delle risoluzioni.

9.1 La disequazione ridotta alla forma normale diventa $\frac{x^2 - x - 2}{2(x-1)} < 0$ e l'insieme delle soluzioni è $S =]-\infty; -1[\cup]1; 2[$.

9.2 La prima disequazione del sistema è soddisfatta nell'insieme $S_1 =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; la seconda disequazione è soddisfatta nell'insieme $S_2 = [-2; 2]$. L'insieme delle soluzioni del sistema è l'intersezione $S = S_1 \cap S_2 = [-2; -1[\cup]1; 2]$.

Geometria Piana

G1) Le diagonali di un rombo sono l'una i ¾ dell'altra.

1.1 Indicata con *d* la misura della diagonale maggiore, esprimere in funzione di *d* le misure del perimetro, dell'area del rombo e dell'area del cerchio inscritto nello stesso.

1.2 Determinare i valori delle grandezze indicate nel precedente punto con d=12cm.

Soluzione

1.1 Facciamo riferimento alla Figura 1- (Apri la figura con Cabrì)

La diagonale maggiore è BD, dunque, con

$$\overline{BD}=d \to \overline{AC}=\frac{3}{4}\overline{BD}=\frac{3}{4}d\ .$$

Il centro O del cerchio inscritto nel rombo è il punto di intersezione delle diagonali ed O è anche punto medio di ciascuna diagonale. Ricordiamo che le diagonali in un rombo sono tra loro perpendicolari. La misura del lato del rombo si trova applicando il teorema di Pitagora ad uno dei quattro triangoli rettangoli in cui le diagonali dividono il quadrilatero. Si ha

$$l=\overline{BC}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{OC}^2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{5}{8}d$$

Il perimetro del rombo misura

$$2p(ABCD)=4l=\frac{5}{2}d$$

L'area del rombo si ottiene dal semiprodotto delle diagonali. Dunque

$$Area(ABCD)=\ d\cdot\frac{3}{4}d\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}d^2$$

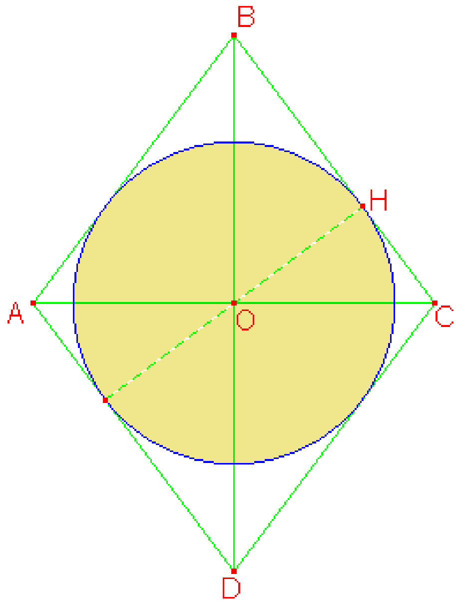

Figura 1 -Rombo con le diagonali nel rapporto 3/4

Calcolo dell'area del cerchio inscritto

Il raggio del cerchio inscritto è uguale alla misura dell'altezza OH relativa all'ipotenusa BC del triangolo rettangolo BOC (o di uno degli altri tre…). Si ha

$$r=\overline{OH}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}{\overline{BC}}=\frac{d/2\cdot 3d/8}{5d/8}=\frac{3}{10}d$$

L'area del cerchio in questione misura

$$S=\pi r^2=\ \pi\left(\frac{3}{10}d\right)^2=\frac{9\pi}{100}d^2$$

1.2 I valori delle grandezze richieste sono

Perimetro(ABCD)= $\frac{5}{2}\cdot 12cm=30cm$;

Area(ABCD)= $\frac{3}{8}d^2=\frac{3}{8}\cdot 144cm^2=54cm^2$

Area del cerchio: $S=\frac{9\pi}{100}d^2=\frac{9\pi}{100}\cdot 144cm^2=\frac{324\pi}{25}cm^2$

G2 Le corde AB, CD di una circonferenza di centro O sono tra loro parallele, disposte da parti opposte rispetto al centro O e misurano rispettivamente $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}$.

2.1 Precisare che tipo di quadrilatero è il quadrilatero convesso ABCD.

2.2 Determinare le misure delle distanze delle corde AB, CD dal centro della circonferenza in funzione della misura del raggio.
2.3 Determinare la misura dell'area e le ampiezze degli angoli del quadrilatero ABCD.

Soluzione

Riportiamo solo le conclusioni e facciamo riferimento alla Figura 2. (Apri la figura con Cabrì)

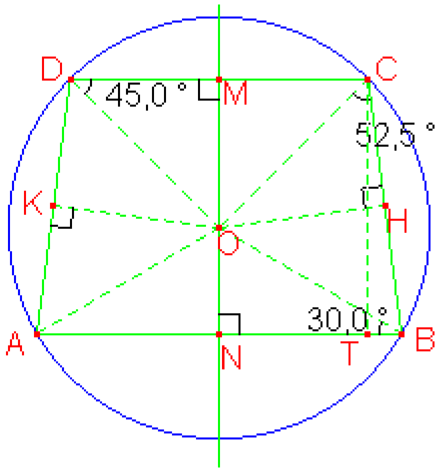

Figura 2 - Trapezio inscritto

2.1 Il quadrilatero è un trapezio isoscele. La base AB è anche il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza avente A e B come due dei suoi vertici.
La corda CD è il lato del quadrato inscritto nella circonferenza di cui C e D sono due vertici.

2.2 Le misure richieste sono:
$\overline{ON} = \frac{r}{2}$, $\overline{OM} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$,

2.3 Area(ABCD)= $\frac{\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot\overline{MN}}{2} =$
$\frac{r^2}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$
Si osservi che il triangolo DCO è rettangolo isoscele con l'angolo retto in O, dunque gli angoli DCO, CDO misurano 45°. Inoltre, il triangolo AOB è isoscele ed ha l'angolo nel vertice O di 120° e dunque i due angoli ABO, BAO misurano 30°. Tenendo ora conto che gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo in un trapezio sono supplementari e che il trapezio è isoscele, si deduce che gli angoli alla base BC del triangolo BOC misurano (180°-(45°+30°)):2= 52°30′. Concludiamo che gli angoli interni del trapezio misurano 82°30′, 97°30′.