

Dinamica

Moto di un sistema di corpi su un piano inclinato e su un piano orizzontale.

Problema

Una macchina deve trainare due rimorchi A e B di massa $m_A=350\text{Kg}$ e $m_B=150\text{Kg}$, legati tra loro con un cavo di acciaio di massa trascurabile su una strada asfaltata sulla quale il coefficiente di attrito volvente è 0,005. La macchina trainante ha massa 1200Kg. Il rimorchio A è agganciato direttamente alla macchina trainante. Trascurando la resistenza dell'aria, risolvere i seguenti quesiti.

- 2.1 Il convoglio inizialmente è fermo. La macchina esercita una forza F_1 costante per otto secondi che consente al convoglio di raggiungere la velocità di 10m/s, quindi il convoglio prosegue con velocità costante. Determinare l'accelerazione del convoglio ed il lavoro sviluppato dal motore della macchina nella fase di accelerazione nell'ipotesi che il moto avvenga su un piano orizzontale.
- 2.2 Determinare la tensione cui è sottoposto il cavo di acciaio durante la fase dell'accelerazione e durante il moto rettilineo uniforme.
- 2.3 Determinare la potenza sviluppata dal motore della macchina allorché il convoglio sale su una strada inclinata di 25° sul piano orizzontale alla velocità di 24Km/h. Determinare le forze che agiscono sul rimorchio A e la tensione del cavo di acciaio.

Elaborazioni

- 2.1 Durante la fase di accelerazione la velocità passa da 0m/s a 10m/s; considerato che ciò si verifica in 8s il convoglio si muove con accelerazione di modulo

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10\text{m/s}}{8\text{s}} = 1,25\text{m/s}^2.$$

Calcolo dello spostamento in fase di accelerazione

Tenendo presenti le leggi del moto uniformemente accelerato, il valore dello spostamento ΔS_1 è

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (8\text{s})^2 = 40\text{m}$$

Calcolo dell'intensità della forza sviluppata dal motore della macchina

Il motore della macchina durante la fase dell'accelerazione deve sviluppare la forza F_1 che deve vincere le forze di attrito che si oppongono al sistema e imprimere allo stesso l'accelerazione $a=1,25\text{m/s}^2$.

La forza d'attrito, considerato che il moto avviene su un piano orizzontale, è data dal prodotto del peso complessivo del sistema dei tre corpi per il coefficiente di attrito volvente. Quindi

$$F^{att} = F_{auto}^{att.} + F_{rim.A}^{att.} + F_{rim.B}^{att.} = (m + m_A + m_B) \cdot g \cdot \mu_v$$

$$F^{att} = (1200 + 350 + 150)\text{Kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,005 \approx 83,4\text{N}$$

Applicando la seconda legge della dinamica si evince che la differenza tra F_1 e la forza d'attrito uguaglia il prodotto della somma delle masse dei tre corpi per l'accelerazione. Dunque possiamo scrivere

$$F_1 - F^{att} = (m + m_A + m_B) \cdot a \Rightarrow F_1 = (m + m_A + m_B) \cdot (g \cdot \mu_v + a) =$$

$$1700\text{Kg} \cdot (9,81\text{m/s}^2 \cdot 0,005 + 1,25\text{m/s}^2) = 2208,4\text{N}$$

Calcolo del lavoro sviluppato dal motore in fase di accelerazione

Poiché il motore applica la forza $F_1=2208,4N$ per un tratto lungo $40m$, il lavoro compiuto è

$$L_1 = F_1 \cdot \Delta S_1 = 2208,4N \cdot 40m = 88336J$$

2.2 Calcolo della tensione del cavo di acciaio

Il cavo d'acciaio è soggetto alla tensione **T** che permette di imprimere l'accelerazione al rimorchio B. Questa forza deve vincere anche la forza d'attrito che incontra il rimorchio.

Dunque deve risultare

$$T - F_{rim.B}^{att.} = m_B \cdot a \Rightarrow T = m_B (g \cdot \mu_v + a) = 150Kg \cdot (9,81 \cdot 0,005 + 1,25)m/s^2 = 194,9N$$

Calcolo della tensione durante il moto rettilineo uniforme

Durante questo moto il cavo d'acciaio è soggetto solo alla tensione che serve per vincere la forza di attrito incontrata dal rimorchio. Infatti, questo procede con velocità costante.

Dunque

$$T' = m_B \cdot g \cdot \mu_v = 150Kg \cdot 9,81m/s^2 \cdot 0,005 = 7,4N$$

2.3 Occorre determinare la forza sviluppata dal motore della macchina.

Nel moto sul piano inclinato, su ciascun corpo, nella direzione del moto, agiscono la forza d'attrito e la componente della forza peso del corpo (parallela al piano inclinato). Il modulo della forza **F** complessiva che deve sviluppare il motore è dunque uguale alla somma delle forze d'attrito con la somma delle componenti delle forze peso lungo la direzione del moto.

Con $\alpha=25^\circ$ si ha:

$$P_{//} = (m + m_A + m_B)g \cdot \sin\alpha; \quad F_{att.} = \mu_v \cdot (m + m_A + m_B)g \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$F = P_{//} + F_{att.} = 1700Kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} (\sin 25^\circ + 0,005 \cdot \cos 25^\circ) \approx 7123,6N$$

Calcolo della potenza sviluppata dal motore

La potenza sviluppata dal motore in un certo intervallo di tempo per definizione è uguale al rapporto tra il lavoro sviluppato e la misura dell'intervallo di tempo in cui tale lavoro è stato compiuto. Il valore della potenza si può anche determinare direttamente moltiplicando il valore della forza applicata con l'intensità del modulo della velocità (del convoglio). Infatti, considerato un tratto di strada di misura Δs , il tempo necessario a percorrerlo con velocità costante di modulo V è $\Delta t = \Delta s/V$; detta **F** la forza applicata (dal motore della macchina) nella direzione e nello stesso verso dello spostamento, il lavoro prodotto è

$$Lavoro = F \cdot \Delta s = F \cdot V \cdot \Delta t$$

e quindi la potenza sviluppata è

$$Potenza = W = \frac{Lavoro}{\Delta t} = \frac{F \cdot V \cdot \Delta t}{\Delta t} = F \cdot V \Rightarrow$$

$$W = 7123,6N \cdot 24 \frac{Km}{h} = 7123,6N \cdot 24 \cdot \frac{1000m}{3600s} \approx 47,5Kw$$

Forze che agiscono sul rimorchio A

Sul rimorchio A agiscono le seguenti forze:

- La forza **F₁** trainante esercitata dalla macchina.
- La forza di attrito **F_{att}=μ_v·m_{Ag}·cosα**, parallela al piano del moto e diretta nel verso opposto allo spostamento del convoglio.
- La componente del peso del rimorchio lungo la direzione del piano inclinato; il verso di questa forza è opposto al verso del moto (quindi verso la base del piano):

$$P_A'' = m_A g \cdot \sin\alpha.$$
- La tensione **T** esercitata dal cavo dovuta al trascinamento del rimorchio B da parte del rimorchio A. La tensione **T** è parallela al piano del moto e diretta dal rimorchio A al rimorchio B.

- La forza di reazione vincolare esercitata dal piano d'appoggio in virtù della quale il rimorchio poggia sul piano.

Relativamente alle forze che agiscono sul rimorchio B, fra i moduli delle componenti lungo il piano del moto sussiste la seguente relazione:

$$F_1 - F_{att.} - P_A'' - T = 0$$

Calcolo della tensione del cavo

La tensione **T** è la forza che permette la salita del rimorchio sul piano inclinato. Poiché il moto avviene a velocità costante, il modulo della tensione è uguale alla somma della forza d'attrito esercitata dalla strada con la componente della forza peso del rimorchio B parallela al piano. Quindi:

$$T = \mu_v \cdot m_B g \cdot \cos 25^\circ + m_B g \cdot \sin 25^\circ = m_B g \cdot (\mu_v \cdot \cos 25^\circ + \sin 25^\circ) \approx 628,6 \text{ N}$$