

Cinematica

Moto di un proiettile: Tiro al piattello

Problema

Giovanni e Aldo giocano al tiro al piattello. Giovanni lascia cadere il piattello dalla sommità di un muro alto 6m e Aldo, collocato sul piano orizzontale a distanza $d=24\text{m}$ dalla verticale del piattello, lancia con una fionda un sassolino puntando alla posizione occupata dal piattello prima che questo sia lasciato cadere. Aldo lancia il sassolino nell'istante in cui vede Giovanni lasciare cadere il piattello.

Sapendo che la velocità iniziale del sassolino scagliato con la fionda è di 40m/s , considerando il piattello come puntiforme, dopo aver adottato un opportuno sistema di riferimento spazio-temporale e trascurando la resistenza dell'aria, risolvere i quesiti che seguono.

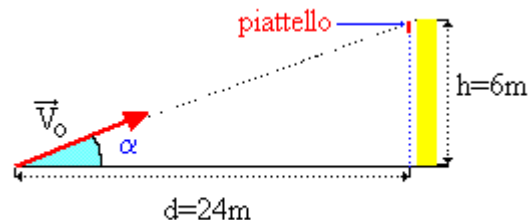


Fig. 1

- 1.1 Determinare l'ampiezza dell'angolo α di lancio del sassolino.
- 1.2 Scrivere le leggi orarie per la velocità e la posizione del sassolino e del piattello nel riferimento adottato.
- 1.3 Verificare che Aldo riuscirà a colpire il piattello.
- 1.4 Determinare l'altezza rispetto al piano orizzontale alla quale il sassolino colpisce il piattello.
- 1.5 Determinare il tempo intercorso tra il lancio del sassolino e l'impatto con il piattello.
- 1.6 Scrivere nel sistema di riferimento l'espressione vettoriale della velocità del sassolino nell'istante dell'impatto con il piattello, precisandone il modulo e l'ampiezza dell'angolo che forma con il piano orizzontale.

Elaborazioni

Considerazioni preliminari e scelta del sistema di riferimento.

Il proiettile ed il piattello durante il loro moto sono soggetti all'accelerazione di gravità $\vec{g}$ diretta secondo la verticale della posizione occupata da ciascuno punto materiale ed orientata verso il basso. Il moto del sassolino si sviluppa nel piano verticale π contenente il vettore velocità iniziale $\vec{V}_0$. Dalle ipotesi fatte sulla direzione di $\vec{V}_0$ si deduce che il piano π contiene anche la posizione iniziale P del piattello e, poiché anche il moto di questo (caduta libera di un grave) si sviluppa lungo la verticale passante per P, si deduce che i due moti avvengono nel piano π . Per la descrizione del moto possiamo assumere un riferimento cartesiano xOy nel piano π con l'origine O nel punto di lancio del sassolino, l'asse delle ascisse disposto orizzontalmente ed orientato verso la verticale del piattello e l'asse delle ordinate lungo la verticale per O e diretto verso l'alto (Fig. 1_2). In questo riferimento siano $(x_s; y_s)$ le coordinate della posizione del sassolino e $(x_p; y_p)$ quelle del piattello durante il volo. Per la misura del tempo fissiamo $t=0\text{s}$ nell'istante in cui il piattello è lasciato cadere.

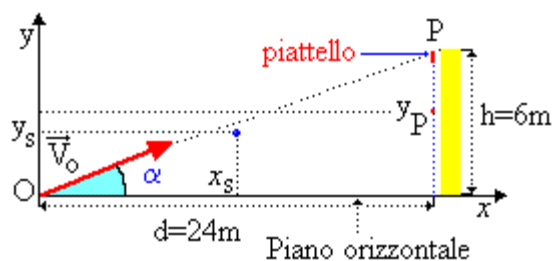


Fig. 1_2

- 1.1 Determinare l'ampiezza dell'angolo α di lancio del sassolino.*

Utilizzando i valori **d** (distanza della verticale del piattello dall'asse delle ordinate) ed **h** (altezza del muro), per l'ampiezza dell'angolo α sussiste l'uguaglianza

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{h}{d} \right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{6\text{m}}{24\text{m}} \right) = \operatorname{arctg}(0,25) \approx 14^\circ 2'.$$

1.2 Scrivere le leggi orarie per la velocità e la posizione del sassolino e del piattello nel riferimento adottato.

Nel riferimento spazio-temporale adottato le componenti della velocità del sassolino durante il volo sono:

$$\begin{aligned} V_x &= V_o \cdot \cos \alpha = V_o \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \quad (\text{questo valore si mantiene costante}); \\ V_y &= V_{oy} - gt = V_o \cdot \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}} - gt. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Le leggi per le coordinate della posizione assunta dal sassolino sono:

$$x_s = V_{ox} \cdot t = V_o \cdot \cos \alpha \cdot t; \quad y_s = V_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (1.2.2)$$

Per il moto del piattello è sufficiente scrivere la legge della componente della velocità lungo l'asse delle ordinate e quella dell'ordinata della posizione. Si ha

$$V_{py} = -gt; \quad y_p = h - \frac{1}{2} gt^2 \quad (1.2.3)$$

1.3 Verificare che Aldo riuscirà a colpire il piattello.

Il sassolino colpirà il piattello se nell'istante in cui la sua ascissa sarà uguale a **d** l'ordinata sarà uguale alla quota alla quale si troverà il piattello.

Ponendo nella prima equazione delle (1.2.2) $x_s = d$ si determina l'istante in cui il sassolino passerà dalla verticale sulla quale si trova il piattello; sostituendo detto valore nell'espressione dell'ordinata del sassolino si determina il valore di quest'ultima. Poiché nello stesso istante anche il piattello deve avere la stessa quota, sostituendo il valore dell'istante suddetto nell'espressione di $y_p(t)$ si dovrà ottenere lo stesso valore dell'ordinata del sassolino. Se ciò si verificherà il sassolino avrà colpito il piattello.

$$\begin{aligned} x_s = d &\Rightarrow V_o \cdot \cos \alpha \cdot t = d \Rightarrow \\ t &= \frac{d}{V_o \cdot \cos \alpha} = \frac{d \sqrt{d^2 + h^2}}{V_o \cdot d} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

La quota alla quale si trova il proiettile nell'istante t trovato è:

$$y_s = V_{oy} \cdot \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o} \right)^2 = V_o \cdot \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}} \cdot \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o} - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2 + h^2}{V_o^2} = h - \frac{g(d^2 + h^2)}{2V_o^2};$$

la quota alla quale si trova il piattello è

$$y_p = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o} \right)^2 = h - \frac{g(d^2 + h^2)}{2V_o^2} \quad (1.3.2)$$

Come si vede **i valori delle due quote sono uguali, perciò il sassolino colpisce il piattello.**

1.4 Determinare l'altezza rispetto al piano orizzontale alla quale il sassolino colpisce il piattello.

Il valore della quota alla quale avviene l'impatto è:

$$y_p = 6m - \frac{9,81ms^{-2} (24^2 + 6^2) m^2}{2 \cdot 40^2 m^2 s^{-2}} \approx 4,12m$$

1.5 Determinare il tempo intercorso tra il lancio del sassolino e l'impatto con il piattello.

Il valore dell'istante dell'impatto si deduce dalla (1.3.1) sostituendo alle grandezze che vi compaiono i rispettivi valori.

$$t = \frac{\sqrt{24^2 + 6^2} m}{40m/s} \approx 0,62s$$

1.6 Scrivere nel sistema di riferimento l'espressione vettoriale della velocità del sassolino nell'istante dell'impatto con il piattello, precisandone il modulo e l'ampiezza dell'angolo che forma con il piano orizzontale.

Dobbiamo determinare i valori delle componenti cartesiane della velocità del sassolino nell'istante $t=0,62s$. Sappiamo già che la componente orizzontale rimane costante; per la componente verticale si deve sostituire il valore indicato nella (1.2.1).

$$V_x = V_o \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} = 40 \frac{m}{s} \cdot \frac{24m}{\sqrt{612}m} \approx 38,81 \frac{m}{s}$$

$$V_y = V_o \cdot \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}} - gt = 40 \frac{m}{s} \cdot \frac{6m}{\sqrt{612}m} - 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 0,62s = 3,62 \frac{m}{s}$$

Il modulo della velocità del sassolino è

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{38,81^2 + 3,62^2} \frac{m}{s} \approx \sqrt{1519,32} \frac{m}{s} \approx 39 \frac{m}{s}$$

Notiamo che la componente verticale della velocità del sassolino è positiva, ciò indica che l'impatto avviene mentre il sassolino è in salita. Il vettore velocità forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse l'angolo acuto β per il quale si ha

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{3,62}{38,81} \approx 0,09327 \Rightarrow \beta = \arctg(0,09327) \approx 5^\circ 20'$$

Seconda parte

Con le ipotesi descritte determinare il modulo minimo della velocità con cui deve essere lanciato il sassolino affinché Aldo riesca a colpire il piattello mentre è in volo.

Risolvendo il quesito 1.3 si è visto che il sassolino si trova sulla verticale del proiettile nell'istante

$t_1 = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o}$ e che in detto istante il piattello ed il sassolino si trovano alla stessa quota rispetto al

piano orizzontale. Ora è evidente che si ha l'impatto tra il sassolino ed il piattello durante il volo se il valore della quota è positivo. Ciò è anche equivalente ad imporre che t_1 sia inferiore al tempo necessario al sassolino a toccare il suolo.

- Imponendo che sia positivo il valore della quota dell'impatto si ha:

$$y_p = h - \frac{g(d^2 + h^2)}{2V_o^2} > 0 \Leftrightarrow V_o^2 > \frac{g(d^2 + h^2)}{2h} \Leftrightarrow V_o > \sqrt{\frac{g(d^2 + h^2)}{2h}}$$

Sostituendo alla grandezze i valori noti si ricava $V_o > 22,367 \frac{m}{s}$.

- Utilizziamo ora come termini per il confronto l'istante t_1 con l'istante t_2 in cui il piattello toccherebbe il suolo nella caduta libera dall'altezza h .
Dall'equazione oraria della posizione,

$$y_p = h - \frac{1}{2}gt^2, \text{ ponendo } y_p=0 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La condizione da imporre affinché avvenga l'impatto durante il volo è

$$t_1 < t_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o} < \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow V_o > \sqrt{\frac{g(d^2 + h^2)}{2h}}$$

Con i due metodi si ottiene, dunque, per il modulo della velocità iniziale del sassolino la stessa limitazione.

Approfondimento - Perché il sassolino colpisce il piattello?

E' opportuno osservare che il sassolino, lanciato con la velocità indicata $\vec{V}_o$, se non fosse soggetto all'accelerazione di gravità seguirebbe un moto rettilineo uniforme e poiché $\vec{V}_o$ punta alla posizione iniziale del piattello evidentemente nell'istante t_1 passerebbe proprio da quel punto. La presenza dell'accelerazione di gravità fa sì che il sassolino ed il piattello nello stesso intervallo di tempo $[0; t_1](s)$ scendano di un segmento di misura assoluta

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt_1^2 \text{ e dunque, poiché i loro moti iniziano contemporaneamente, nell'istante } t_1 \text{ si}$$

troveranno alla stessa quota. Naturalmente, il modulo della velocità $\vec{V}_o$ deve essere sufficiente a garantire che il sassolino ce la faccia ad attraversare la verticale del piattello. Vediamo perché.

Dalla legge oraria della quota del sassolino:

$$y_s = V_{oy} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = V_o \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

si deduce che il sassolino tocca il suolo nell'istante $t' = \frac{2V_o \sin \alpha}{g}$ alla distanza dalla verticale

del punto di lancio (gittata) $x_G = V_o \cos \alpha \cdot t' = \frac{2V_o^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$, ed essendo

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}},$$

in definitiva risulta

$$x_G = \frac{2V_o^2 h d}{g(d^2 + h^2)}.$$

Osserviamo ora che

$$V_o < \sqrt{\frac{g(d^2 + h^2)}{2h}} \Rightarrow x_G = \frac{2V_o^2 h d}{g(d^2 + h^2)} < \frac{2hd}{g(d^2 + h^2)} \cdot \left[\sqrt{\frac{g(d^2 + h^2)}{2h}} \right]^2 = d.$$

Pertanto, con l'ipotesi $V_o < \sqrt{\frac{g(d^2 + h^2)}{2h}}$ il sassolino tocca il suolo ad una distanza dal punto di lancio minore di quella alla quale si trova la verticale del piattello e dunque non può avvenire l'impatto.