

Esercizi sul calcolo combinatorio

Es1) Stabilire quanti numeri di tre cifre diverse si possono formare con le cifre 3, 5, 6, 7, 9.

Soluzione

La quantità dei numeri aventi la proprietà richiesta è uguale al numero delle disposizioni semplici di 5 elementi della classe 3, dunque esistono

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

numeri diversi

* * * * *

Es2) Considerate le cifre 2, 3, 5, 6, 7, 8 risolvere i quesiti che seguono.

- 2.1 Stabilire quanti numeri si possono comporre aventi tre cifre tutte diverse.
- 2.2 Stabilire quanti numeri aventi 4 cifre tutte diverse si possono comporre.
- 2.3 Indicare quanti tra i tre numeri di tre cifre diverse ottenuti terminano con 8.
- 2.4 Indicare quanti dei numeri aventi tre cifre diverse sono pari.
- 2.5 Indicare quanti numeri di tre cifre si possono comporre, con le cifre tutte diverse tra loro, sapendo che devono essere pari ed avere come prima cifra una dispari.

Soluzione

- 2.1 La quantità dei numeri aventi la caratteristica richiesta è pari alle disposizioni semplici di 6 elementi della classe 3: $D_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
- 2.2 La quantità dei numeri aventi la caratteristica richiesta è pari alle disposizioni semplici di 6 elementi presi a 4 a 4: $D_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
- 2.3 Fissato il valore 8 per la cifra delle unità per i numeri di tre cifre che devono essere composti, osserviamo che dovendo essere tutte diverse le cifre che compongono ciascun numero, le altre due cifre possono essere scelte tra le cinque cifre rimanenti e le loro disposizioni sono pari alle disposizioni semplici di 5 elementi della classe 2. Pertanto esistono $D_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$ numeri del tipo indicato.
Un modo più elegante per rispondere al quesito.
Poiché nel precedente punto 2.1 si è visto che esistono 120 numeri diversi di tre cifre e le cifre disponibili sono sei, si deduce che un sesto di essi avrà come ultima cifra 8, un altro sesto come ultima cifra il 2, ... Quindi la quantità dei numeri richiesti è $120:6=20$.
- 2.4 I numeri pari che si possono ottenere con il gruppo delle cifre disponibili sono quelli la cui ultima cifra è 2, oppure 6, oppure 8. Per il ragionamento esposto nella risoluzione del precedente quesito 2.3 abbiamo visto che esistono 20 numeri che terminano con 2, altri 20 che terminano con 6 ed altri 20 che terminano con 8. Concludiamo che i numeri pari ottenibili con le cifre a disposizione sono $3 \cdot 20=60$.
- 2.5 I numeri richiesti devono avere come ultima cifra una del gruppo 2, 6, 8 e come prima cifra una del gruppo 3, 5, 7. Osserviamo che una volta fissata la prima e la terza cifra del numero, la seconda cifra può essere una delle altre quattro rimaste. Quindi, esistono quattro numeri che avranno come prima cifra 3 e terza cifra 2, altri quattro numeri che avranno con prima cifra 3 e terza cifra 6, ...
Visto che la prima cifra e la terza cifra possono essere scelte in tre modi diversi, mentre la seconda cifra si può scegliere in quattro modi diversi, si conclude che la totalità dei numeri richiesti è $3 \cdot 3 \cdot 4=36$.

* * * * *

Es3) Considerate le seguenti cifre 2, 3, 4, 5, risolvere i quesiti che seguono.

- 3.1 Determinare quanti numeri di tre cifre si possono comporre nell'ipotesi che le cifre disponibili possano essere presenti fino a tre volte.
- 3.2 Dei numeri ottenuti nel precedente punto 3.1 stabilire quanti non contengono il 5.
- 3.3 Scrivere tutti i numeri determinati nel precedente punto 3.1 che terminano con 5.

Soluzione

3.1 Avendo a disposizione 4 cifre distinte, la quantità dei numeri aventi la caratteristica richiesta è pari al numero delle disposizioni con ripetizione di quattro elementi della classe 3. In simboli:

$$n_1 = D'_{4,3} = 4^3 = 64$$

3.2 I numeri che non contengono il cinque sono quelli che si possono formare con le altre tre cifre, anche ripetendole. Dunque la totalità di questi numeri è data dalle disposizioni con ripetizione di tre elementi della classe 3. Quindi

$$n_2 = D'_{3,3} = 3^3 = 27$$

3.3 I numeri richiesti possono contenere il 5 tre volte, due volte o una volta, ma ciascuno deve avere il 5 come ultima cifra.

Esiste solo il numero 555 che contiene tre volte il 5.

I numeri che contengono due volte il 5, con tale cifra come cifra delle unità, possono avere il secondo 5 come cifra delle decine o delle centinaia.

In ciascuna delle due modalità si deve completare la terna con una delle altre tre cifre disponibili (2, 3, 4); quindi, fissata la posizione del 5 si hanno 6 possibili soluzioni diverse.

I numeri che contengono il 5 solo una volta lo devono avere come cifra delle unità; le altre due cifre sono da scegliere tra le altre tre, con possibilità che siano la stessa cifra. La quantità di tali numeri è data dalle disposizioni con ripetizione di tre elementi della classe due, quindi $D'_{3,2} = 3^2 = 9$.

Concludiamo che la totalità dei numeri aventi la caratteristica richiesta è:
 $1+6+9=16$

I numeri sono riportati nella tabella a lato.

5	5	5
4	5	5
5	4	5
3	5	5
5	3	5
2	5	5
5	2	5
4	4	5
3	3	5
2	2	5
3	4	5
4	3	5
2	4	5
4	2	5
2	3	5
3	2	5

* * * * *

Es4) Considerate le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 risolvere i quesiti che seguono.

- 4.1 Calcolare quanti numeri di quattro cifre tutte distinte si possono formare.
- 4.2 Calcolare quanti numeri di quattro cifre anche ripetute si possono formare.
- 4.3 Calcolare quanti numeri di quattro cifre anche ripetute terminano con 0.

Soluzione

4.1 Le cifre a disposizione sono 10 ed i numeri da comporre devono avere 4 cifre distinte. Si deve tenere presente che i numeri la cui prima cifra è lo 0 (es. 0123, 0125,...) in realtà sono composti da tre cifre. Pertanto, la quantità di numeri che si possono ottenere ed aventi le caratteristiche indicate è pari alla differenza delle disposizioni semplici di 10 elementi della classe 4 ed il numero delle disposizioni semplici di 9 elementi della classe 3. Il secondo numero rappresenta la quantità dei numeri di quattro cifre la cui prima cifra è 0. Dunque:

$$n_1 = D_{10,4} - D_{9,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 = 9^2 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$$

- 4.2 La totalità dei quattro numeri di 4 cifre, in ciascuno dei quali una stessa cifra può essere presente fino a 4 volte, è pari alle disposizioni con ripetizione di 10 elementi della classe 4: $D'_{10,4} = 10^4$. Osserviamo, però, che tra questi ci sono $10^3=1000$ numeri che hanno la cifra delle migliaia uguale a zero e dunque non vanno considerati. La totalità dei numeri aventi la caratteristica richiesta è perciò: $10.000-1000=9.000$
- 4.3 I numeri di quattro cifre che terminano con 0 sono 900. Infatti, dai 1.000 numeri che si possono formare con le dieci cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 prese a tre a tre, ce ne sono 100 che hanno lo zero al primo posto (cifra delle migliaia) e quindi vanno sottratti; perciò restano 900 numeri diversi.

* * * * *

Es5) Considerate le cifre 4, 5, 6, 7, 8, 9 risolvere i quesiti che seguono.

- 5.1 Stabilire quanti numeri di tre cifre si possono formare nei quali la cifra delle centinaia è il 5 e detta cifra può anche essere presente come cifra delle decine o delle unità.
- 5.2 Stabilire quanti numeri di tre cifre si possono formare i quali abbiano come prima cifra (delle centinaia) il 5 e le altre due possono essere scelte tra le sei disponibili, anche con ripetizione.

Soluzione

- 5.1 Fissata come cifra delle centinaia il 5, esistono $D_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$ numeri di tre cifre che hanno la cifra delle decine e quella delle unità diverse da 5. Inoltre, esistono cinque numeri del tipo 55X e cinque numeri del tipo 5X5, con $X \in \{4;6;7;8;9\}$. Infine, esiste il numero 555. In totale esistono 31 numeri con la caratteristica indicata.
- 5.2 La totalità dei numeri aventi la caratteristica richiesta è $6^2=36$.

* * * * *

Es6) Considerata la parola “LESTO”, determinare il numero di anagrammi della stessa nei quali le due vocali siano affiancate.

Soluzione

Osserviamo che le vocali E, O possono essere disposte solo in uno degli 8 modi indicati nella tabella a fianco. Poiché per ciascuna di queste modalità le altre tre lettere possono disporsi in $3!=6$ modi diversi, si conclude che gli anagrammi possibili sono $8 \cdot 6=48$.

1°	2°	3°	4°	5°
E	O			
	E	O		
		E	O	
			E	O
O	E			
	O	E		
		O	E	
			O	E