Problemi sul calcolo delle Probabilità

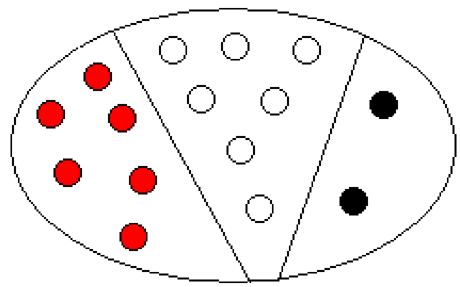
Es_1) Un'urna contiene sei palline rosse, sette palline bianche e due palline nere. Risolvere i seguenti quesiti.

1.1 Si estraggono contemporaneamente due palline. Determinare la probabilità che nessuna pallina sia rossa.

1.2 Estraendo tre palline contemporaneamente tra esse vi è al massimo una pallina bianca.

Soluzione

1.1 Occorre estrarre due palline contemporaneamente e stabilire quale sia la probabilità che esca una coppia di palline nessuna delle quali sia rossa. La probabilità dell'evento è data dal rapporto tra il numero delle coppie che si possono formare con le palline bianche e quelle nere ed il numero totale delle coppie $C_{15;2}$ che è possibile comporre con le 15 palline contenute nell'urna.



Il numero delle coppie utili al verificarsi dell'evento è dato dalla combinazioni semplici di classe due che si ottengono con le sette palline bianche e le due palline nere. Questo numero è: $C_{9;2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$

Il numero totale di coppie che si possono comporre con le 15 palline è $C_{15;2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$.

Pertanto la probabilità dell'evento in esame è

$$p = \frac{C_{9;2}}{C_{15;2}} = \frac{36}{105} = \frac{12}{35}$$

1.2 Sia E l'evento

E=<< Si estrae una terna di palline contenente al massimo una pallina bianca>>

Prima soluzione

Osserviamo che le terne di palline che permettono il verificarsi dell'evento E sono quelle composte dalle sole palline rosse e dalle palline nere, e dalle terne composte da una pallina bianca e le altre due colorate (entrambe rosse, entrambe nere, oppure una rossa ed una nera). Il numero delle terne composte da palline rosse e nere è dato dalla combinazioni semplici di classe 3 delle otto palline (6 rosse + 2 nere): $N_1= C_{8;3}$. Il numero delle terne contenenti una sola pallina bianca è dato dal prodotto del numero di palline bianche per le combinazioni semplici di classe 2 delle 8 palline rosse e nere; dunque $N_2=7\cdot C_{8;2}$. IL numero totale di terne componibili con le 15 palline è dato dalle combinazioni semplici di classe 3 di 15 elementi: $N= C_{15;3}$. La probabilità dell'evento E è allora

$$P(E) = \frac{C_{8;3} + 7 \cdot C_{8;2}}{C_{15;3}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} + 7 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2}} = \frac{7 \cdot 36}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{36}{65}$$

Seconda soluzione

Osserviamo che le terne di palline non idonee al verificarsi dell'evento in esame sono quelle composte da tre palline bianche e quelle che ne contengono due. Il primo gruppo è composto dalle combinazioni semplici di 7 elementi della classe 3: $N_1 = C_{7;3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$; il secondo gruppo è composto dal prodotto del numero di combinazioni semplici di classe 2 che si compongono con le sette palline bianche moltiplicato per le 6+2=8 palline rosse e nere: $N_2 = C_{7;2} \cdot 8 = 21 \cdot 8 = 168$. Perciò le terne di palline non idonee al verificarsi dell'evento è $N_1 + N_2 = 35 + 168 = 203$. Possiamo determinare la probabilità dell'evento contrario dell'evento E; essa è:

$$P\left(\overline{E}\right) = \frac{203}{C_{15;3}} = \frac{203}{15 \cdot 14 \cdot 13} \cdot 3! = \frac{29}{65}$$

Sfruttando ora il teorema sulla probabilità dell'evento contrario ricaviamo la probabilità dell'evento E.

$$P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right) = 1 - \frac{29}{65} = \frac{36}{65}$$

Es_2) Essendo E_1, E_2 due eventi dello spazio degli eventi Ω, è noto che $P(E_1) = \frac{1}{10}$, $P(E_2) = \frac{3}{8}$, $P(E_1 \cup E_2) = \frac{7}{16}$; dopo aver enunciato il teorema della probabilità totale, calcolare $P(E_1 \cap E_2)$ e precisare se gli eventi E_1, E_2 sono indipendenti.

Soluzione

Ricordiamo che il teorema della probabilità totale permette di determinare la probabilità dell'evento unione di due eventi e risulta:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Dalle informazioni fornite si può determinare la probabilità dell'evento intersezione.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{10} + \frac{3}{8} - \frac{7}{16} = \frac{3}{80}$$

Indipendenza degli eventi.

Due eventi sono stocasticamente indipendenti se il verificarsi o meno dell'uno non determina alcuna influenza sul verificarsi dell'altro. Sussiste un teorema secondo il quale " due eventi E_1, E_2 sono stocasticamente indipendenti se e solo se la probabilità dell'evento intersezione $E_1 \cap E_2$ è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$."

Dai valori precedenti si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{80} = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{8} = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

L'uguaglianza è verificata, dunque i due eventi sono indipendenti.