Estrazioni di palline da un'urna

(applicazione dei teoremi della probabilità totale e dell'evento contrario)

Problema_2

In un sacchetto vi sono palline dei colori giallo, rosso e verde, indistinguibili. Il 10% di ciascun tipo di palline è difettoso. Del totale delle palline, quelle gialle rappresentano il 25%, quelle rosse il 50% e quelle verdi il restante 25%. Determinare la probabilità che si verifichi ciascuno dei seguenti eventi.

1) E_1=<<Estraendo una pallina a caso dal sacchetto si ottiene una pallina rossa difettosa>>.
2) E_2=<<Estraendo a caso una pallina dal sacchetto si ha una pallina gialla o una pallina rossa buona>>.
3) E_3=<<Estraendo a caso una coppia di palline dal sacchetto almeno una delle due è buona>>.
4) E_4=<<Estraendo a caso due palline dal sacchetto si hanno palline di colori diversi>>.
5) E_5=<<Estraendo a caso due palline dal sacchetto si hanno due palline dello stesso colore prive di difetti>>.

Soluzione

Premessa

Sia N il numero totale di palline contenute nel sacchetto. Le palline Gialle sono in numero di $N_G = \frac{25}{100}N = \frac{1}{4}N$, quelle rosse sono $N_R = \frac{1}{2}N$, quelle verdi sono $N_V = \frac{1}{4}N$.

Le palline difettose sono:

$N_{Gd} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4}N = \frac{1}{40}N$, quelle gialle; $N_{Rd} = \frac{1}{20}N$, quelle rosse; $N_{Vd} = \frac{1}{40}N$ quelle verdi.

***

1) La probabilità che si verifichi l'evento E_1 è data dal rapporto tra il numero di palline rosse difettose ed il numero complessivo di palline. Quindi

$$p(E_1) = \frac{N_{Rd}}{N} = \frac{1}{20}N : N = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$$

2) Le palline rosse buone sono in numero $N_{Rb} = \frac{90}{100}\cdot\frac{1}{2}N = \frac{9}{20}N$. Pertanto la probabilità dell'evento E_2 è

$$p(E_2) = \frac{N_G + N_{Rb}}{N} = \left(\frac{1}{4}N + \frac{9}{20}N\right) : N = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 70\%$$

3) Si può determinare la probabilità dell'evento E_3 considerando il corrispondente **evento contrario** $\overline{E_3}$ =<<Si estrae una coppia di palline entrambe difettose>>, e sarà

$$p(E_3)=1-p(\overline{E_3}).$$

La probabilità $p(\overline{E_3})$ è data dal rapporto tra il numero di tutte le possibili coppie di palline difettose che si possono comporre con il numero di tutte le possibili coppie di palline che si possono comporre con le N palline. Ricordiamo che N_d=N:10 è il numero complessivo delle palline difettose. Quindi

$$p(\overline{E_3})=\frac{C_{N_d,2}}{C_{N,2}}=\frac{N_d\cdot(N_d-1)}{N\cdot(N-1)}=\frac{\frac{1}{10}N\cdot\left(\frac{1}{10}N-1\right)}{N\cdot(N-1)}=\frac{N-10}{100(N-1)}$$

La probabilità di E_3 è dunque:

$$p(E_3)=1-p(\overline{E_3})=1-\frac{N-10}{100(N-1)}=\frac{9(11N-10)}{100(N-1)}$$

Osservazione sulla validità del risultato

Premesso che N è un numero naturale positivo, considerato che nel sacchetto ci sono palline di tre colori diversi, per ciascun colore vi deve essere almeno una pallina. Inoltre, **l'informazione specifica che per ogni colore esiste il 10% di palline difettose implica che vi deve essere almeno una pallina difettosa per ogni colore** e dunque, se indichiamo con N_{Gd}, N_{Rd}, N_{Vd} rispettivamente le quantità di palline difettose dei colori Giallo, Rosso e Verde, devono essere verificate le tre disuguaglianze

a) $N_{Gd}=\frac{1}{10}N_G=\frac{1}{40}N\geq 1$, per le palline gialle;

b) $N_{Rd}=\frac{1}{10}N_R=\frac{1}{20}N\geq 1$, per le palline rosse;

c) $N_{Vd}=\frac{1}{10}N_V=\frac{1}{40}N\geq 1$, per le palline verdi.

Dalle disuguaglianze a) e c) deduciamo che deve risultare $N\geq 40$. **Il numero minimo di palline disponibili nel sacchetto deve essere 40** e con tale ipotesi vi sono quattro palline difettose: una gialla, due rosse, una verde.

Per la concretezza del problema in esame possiamo addirittura affermare che nel sacchetto vi deve essere un numero di palline complessivo che sia un multiplo positivo di 40: 40, 80, 120,….
Ogni altra composizione non potrebbe corrispondere alla realtà discussa nel problema.

Il lettore verifichi che con il valore minimo N=40 risulta $p(E_3)=\frac{387}{390}$.

4) La probabilità dell'evento E_4 è data dal rapporto tra la totalità delle coppie composte da palline di colore diverso e la totalità delle coppie di palline che si possono formare con tutte le N palline; il numero di queste ultime è uguale al numero di combinazioni semplici di classe 2 che è $C_{N,2}=\dfrac{N(N-1)}{2}$.

Indicando con:

N_{GR}, il numero delle coppie formate con una pallina gialla ed una rossa; risulta

$$N_{GR}=N_G\cdot N_R=\frac{1}{4}N\cdot\frac{1}{2}N=\frac{1}{8}N^2;$$

N_{GV}, il numero delle coppie formate con una pallina gialla ed una verde; risulta

$$N_{GV}=N_G\cdot N_V=\frac{1}{4}N\cdot\frac{1}{4}N=\frac{1}{16}N^2;$$

N_{RV}, il numero delle coppie formate con una pallina gialla ed una verde; risulta

$$N_{RV}=N_R\cdot N_V=\frac{1}{2}N\cdot\frac{1}{4}N=\frac{1}{8}N^2;$$

$N_{bicolori}$, il numero delle coppie formate da due palline aventi colore diverso; risulta

$$N_{bicolori}=N_{GR}+N_{GV}+N_{RV}=\frac{5}{16}N^2$$

La probabilità dell'evento E_4 è

$$p(E_4)=\frac{N_{bicolori}}{C_{N,2}}=\frac{5}{16}N^2:\frac{N(N-1)}{2}=\frac{5N}{8(N-1)}$$

5) L'evento E_5 si verifica se nell'estrazione si presenta una coppia di palline gialle, entrambe buone, o una coppia di palline rosse, entrambe buone, o una coppia di palline verdi entrambe buone. Se definiamo gli eventi

E_{5G}=<<E' estratta una coppia di palline gialle buone>>,

E_{5R}=<<E' estratta una coppia di palline rosse buone>>,

E_{5V}=<<E' estratta una coppia di palline verdi buone>>,

evidentemente l'evento E_5 è l'unione logica degli eventi appena definiti,

$E_5=E_{5G}\cup E_{5R}\cup E_{5V}$

Gli eventi E_{5G} , E_{5R} , E_{5V} sono incompatibili, per cui, dal **teorema della probabilità totale**, otteniamo

$$p(E_5) = p(E_{5G} \cup E_{5R} \cup E_{5V}) = p(E_{5G}) + p(E_{5R}) + p(E_{5V})$$

Calcoliamo dunque le probabilità dei singoli eventi E_{5G} , E_{5R} , E_{5V}.

Le palline gialle buone sono in numero $N_{Gb} = \frac{9}{10} N_G = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{4} N = \frac{9}{40} N$.

Le palline rosse buone sono in numero $N_{Rb} = \frac{9}{10} N_R = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} N = \frac{9}{20} N$.

Le palline verdi buone sono in numero $N_{Vb} = \frac{9}{10} N_V = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{4} N = \frac{9}{40} N$.

La probabilità di ciascuno degli eventi in oggetto è il rapporto tra il numero di coppie che si possono formare con le palline buone del colore corrispondente ed il numero complessivo di coppie che si possono formare con le N palline. Si ha:

$$p(E_{5G}) = \frac{C_{N_{Gb},2}}{C_{N,2}} = \frac{N_{Gb}(N_{Gb}-1)}{N(N-1)} = \frac{\frac{9}{40}N\left(\frac{9}{40}N-1\right)}{N(N-1)} = \frac{9(9N-40)}{40^2(N-1)};$$

$$p(E_{5R}) = \frac{C_{N_{Rb},2}}{C_{N,2}} = \frac{N_{Rb}(N_{Rb}-1)}{N(N-1)} = \frac{\frac{9}{20}N\left(\frac{9}{20}N-1\right)}{N(N-1)} = \frac{9(9N-20)}{20^2(N-1)};$$

$$p(E_{5V}) = \frac{C_{N_{Vb},2}}{C_{N,2}} = \frac{N_{Vb}(N_{Vb}-1)}{N(N-1)} = \frac{9(9N-40)}{40^2(N-1)}.$$

Continuando abbiamo

$$p(E_5) = p(E_{5G}) + p(E_{5R}) + p(E_{5V}) = \frac{9(9N-40)}{40^2(N-1)} + \frac{9(9N-20)}{20^2(N-1)} + \frac{9(9N-40)}{40^2(N-1)} =$$

$$\ldots = \frac{18(27N-80)}{40^2(N-1)}$$

Il lettore verifichi che con N=40 si ha $p(E_5) = \frac{15}{52}$.