

Combinatoria e probabilità

Esercitazione sulla composizione di numeri, lancio di due dadi, estrazione di palline da una e due urne. Evento composto e probabilità condizionata.

Problema-1- Avendo a disposizione le cifre 0,1,2,3,4, 5 calcolare:

- a) quanti numeri di due cifre diverse si possono formare; Risp. 25
- b) quanti numeri di due cifre anche ripetute si possono formare e indicare di essi il minore e il maggiore; Risp. 30;10;55
- c) quanti numeri pari di valore non superiore a 30 si possono ottenere, nell'ipotesi che le cifre assegnate non si possano ripetere; Risp. 9
- d) quanti sono i numeri dispari che si possono ottenere aventi un numero qualsiasi di cifre ma utilizzando in ciascuno numero le cifre assegnate una sola volta; Risp. 796
- e) quanti numeri di tre cifre, comunque prese, si possono formare. Risp. 180

Problema-2 – Si lanciano due dadi regolari a sei facce numerate da 1 a 6. Calcolare:

- a) la probabilità che sulle due facce si presenti la coppia (2;4) Risp. 1/18
- b) la probabilità che sulle facce si presenti una coppia contenente solo un numero pari (ad. Esempio (2;3), 3;6), ecc...); Risp. 1/2
- c) che la somma dei due numeri sia minore di 5; Risp. 5/18
- d) che la somma dei due numeri sia compresa tra 5 e 8; Risp. 23/36
- e) che al massimo uno dei due numeri sia pari. Risp. 3/4

Problema-3

Un'urna contiene 10 palline indistinguibili se non dal colore; delle palline 4 sono gialle e 6 rosse. Si estraggono a caso due palline contemporaneamente. Calcolare la probabilità di ciascuno dei seguenti eventi:

- E_1 =" Escono due palline gialle" Risp. 2/15
- E_2 ="Escono due palline di colore diverso" Risp. 8/15
- E_3 = "Almeno una delle due palline è rossa". Risp. 13/15

Problema-4(probabilità condizionata)

Sia hanno due urne, A e B contenenti A 4 palline gialle e 6 rosse, B 5 Gialle e 3 Rosse. Si estrae una pallina a caso dall'urna A e la si inserisce nell'urna B. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna B essa sia rossa.

Risp. 3/5

Segue la risoluzione.

Problema-3

Un'urna contiene 10 palline indistinguibili se non dal colore; delle palline 4 sono gialle e 6 rosse. Si estraggono a caso due palline contemporaneamente. Calcolare la probabilità di ciascuno dei seguenti eventi:

E_1 =" Escono due palline gialle"

E_2 ="Escono due palline di colore diverso"

E_3 = "Almeno una delle due palline è rossa".

Soluzione

a) Il numero delle coppie di palline che si possono formare con le 10 palline è pari al numero delle combinazioni semplici di 10 oggetti della classe 2, quindi $N = C_{10;2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Il numero di coppie che si possono formare con le 4 palline gialle è pari alle combinazioni semplici di 4 oggetti della classe 2, quindi $N_G = C_{4;2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. La probabilità dell'evento in oggetto è

$$P(E_1) = \frac{N_G}{N} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

b) Il numero delle coppie di palline di colore diverso è $4 \times 6 = 24$. La probabilità dell'evento E_2 è

$$P(E_2) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

c) L'evento si verifica se entrambe le palline sono rosse o una è rossa e l'altra è gialla. Il numero delle coppie di palline entrambe rosse è $N_R = C_{6;2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Il numero di coppie di palline di colore diverso abbiamo visto che è 24. La probabilità dell'evento in esame è

$$P(E_3) = \frac{15 + 24}{45} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}.$$

Osservazione

L'evento E_3 è il contrario dell'evento E_1 . Infatti, affermare che almeno una delle due palline è rossa equivale ad affermare che le due palline non sono entrambe gialle. Pertanto la probabilità di E_3

si può determinare utilizzando il **teorema della probabilità dell'evento contrario**, dunque

$$P(E_3) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}.$$

*** **

Problema-4 (probabilità condizionata)

Si hanno due urne: A con 4 palline gialle e 6 rosse, B con 5 palline gialle e 3 rosse. Si estrae una pallina a caso dall'urna A e la si inserisce nell'urna B. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna B essa sia rossa.

Soluzione

Definiamo i seguenti eventi

A_R ="Dall'urna A si estrae una pallina rossa"

A_G ="Dall'urna A si estrae una pallina gialla"

E ="Dall'urna B si estrae una pallina rossa dopo che è stata inserita in B la pallina estratta da A"

La pallina che si estrae dall'urna A può essere gialla o rossa e una volta immessa nell'urna B ne modifica la composizione. Per il calcolo della probabilità dell'evento E consideriamo i due eventi:

E_1 = "Dall'urna B si estragga una pallina rossa nell'ipotesi che la pallina estratta dall'urna A e immessa in B sia stata rossa";

E_2 = "Dall'urna B si estragga pallina rossa nell'ipotesi che la pallina estratta dall'urna A e immessa in B sia stata gialla".

I due eventi E_1, E_2 sono evidentemente incompatibili e la loro unione rappresenta l'evento E. Per il **teorema della probabilità totale** la somma delle loro probabilità fornisce la probabilità di E. Formalmente scriviamo

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

La probabilità di E_1 è uguale al prodotto della probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna A (valore =3/5) con il valore della probabilità di estrarre ancora pallina rossa dall'urna B (contenente dopo la modifica 5 palline gialle e 4 rosse). Analogamente, la probabilità di E_2 , è uguale al prodotto della probabilità di estrarre una pallina gialla dall'urna A (valore =2/5) con il valore della probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna B (contenente dopo la modifica 6 palline gialle e 3 rosse).

Valori delle probabilità

$$P(A_R) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \quad P(A_G) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5};$$

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{5}$$