Calcolo combinatorio

a) Dimostrare che sussiste l'uguaglianza: $\binom{20}{16}=\frac{5}{16}\binom{20}{15}$

b) Dimostrare che sussiste l'uguaglianza
$\binom{n+2}{k-1}=\binom{n+2}{n-k+3}$

c) Risolvere l'equazione $D_{x;3}+8D_{x+1;2}=D_{x+2;3}+80$

d) Nell'equazione $4\binom{x}{2}+5\binom{x-1}{3}=k\binom{x+1}{3}$

Q1- Determinare il valore del parametro k in modo che x=5 sia soluzione dell'equazione.
Q2- Per il valore determinato di k si risolva l'equazione ottenuta in x per stabilire se la stessa ammette ulteriori soluzioni.

e) Calcolare il quinto termine dello sviluppo della seguente potenza $\left(\frac{1}{2}a^{4n}b^3+a^nb^{-2}\right)^7$

Soluzione

a)
$$\binom{20}{16}=\frac{5}{16}\binom{20}{15}\rightarrow\frac{20!}{16!\cdot 4!}=\frac{5}{16}\cdot\frac{20!}{15!\cdot 5!}\rightarrow\frac{1}{16\cdot 15!\cdot 4!}=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{15!\cdot 5\cdot 4!}\rightarrow\frac{1}{16}=\frac{1}{16}\text{ C.V.D.}$$

* * * * * * *

b) Uguaglianza da provare $\binom{n+2}{k-1}=\binom{n+2}{n-k+3}$

Dim.
Sviluppiamo i due membri separatamente.
$$\binom{n+2}{k-1}=\frac{(n+2)!}{(k-1)!(n+2-(k-1))!}=\frac{(n+2)!}{(k-1)!(n-k+3)!};$$
$$\binom{n+2}{n-k+3}=\frac{(n+2)!}{(n-k+3)!\cdot(n+2-(n-k+3))!}=\frac{(n+2)!}{(n-k+3)!\cdot(k-1)!}$$
Le due espressioni ottenute coincidono, perciò l'uguaglianza sussiste.

* * * * * * *

c) Equazione $D_{x;3}+8D_{x+1;2}=D_{x+2;3}+80$

Prima di sviluppare l'equazione osserviamo che ***x* deve essere un numero naturale** maggiore o uguale a 3 affinché abbiano senso i tre termini relativi alle disposizioni semplici che compaiono nell'equazione.
Ricordando la formula per il calcolo delle disposizioni semplici di n elementi della classe k:
$D_{n;k}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$
l'equazione assume la seguente forma

$$x(x-1)(x-2)+8(x+1)x=(x+2)(x+1)x+80 \to$$
$$\left(x^3-3x^2+2x\right)+\left(8x^2+8x\right)= x^3+3x^2+2x+80 \to 2x^2+8x-80=0 \to$$
$$x^2+4x-40=0 \to \frac{\Delta}{4}=4+40=44$$

A questo punto possiamo già affermare che l'equazione $x^2+4x-40=0$ non ha radici intere e quindi l'equazione in esame non ha soluzioni.

* * * * * * *

d) Nell'equazione $4\binom{x}{2}+5\binom{x-1}{3}=k\binom{x+1}{3}$

Q1- Determinare il valore del parametro k in modo che x=5 sia soluzione dell'equazione

Tenendo presente il significato di coefficiente binomiale ed il significato di radice di un'equazione, l'uguaglianza da studiare è

$$4\binom{5}{2}+5\binom{4}{3}=k\binom{6}{3} \to 4\cdot\frac{5\cdot4}{2}+5\cdot\frac{4\cdot3\cdot2}{6}=k\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{6} \to 40+20=20k \to k=3$$

Q2- Sostituendo il valore di k trovato si ottiene l'equazione seguente

$$4\binom{x}{2}+5\binom{x-1}{3}=3\binom{x+1}{3}$$

Osserviamo che la variabile x deve assumere valore intero maggiore o uguale a 4.

$$4\cdot\frac{x(x-1)}{2}+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)=\frac{3}{6}(x+1)x(x-1) \quad (*)$$

Nell'equazione (*) si possono dividere i due membri per il fattore (x-1) giacché questo, con la condizione $x\geq4$, risulta senz'altro diverso da zero. Eseguendo i calcoli si perviene all'equazione

$$x^2-8x+15=0 \to x_1=3 \text{ e } x_2=5.$$

Il primo valore non è accettabile perché, come precisato, deve risultare $x\geq4$; pertanto l'equazione in esame ammette solo la soluzione x=5.

* * * * * * *

e) Calcolare il quinto termine dello sviluppo della seguente potenza $\left(\frac{1}{2}a^{4n}b^3+a^nb^{-2}\right)^7$

Risposta

Il quinto termine richiesto è

$$\binom{7}{4}\left(\frac{1}{2}a^{4n}b^3\right)^{7-4}\cdot\left(a^nb^{-2}\right)^4=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4!}\cdot\frac{1}{8}\cdot a^{12n}b^9\cdot a^{4n}b^{-8}=\frac{35}{8}\cdot a^{16n}b$$

* * * * * * *