Problema

Un'urna contiene 4 palline rosse e 3 verdi. Si estraggono in blocco 3 palline. Sia X la v.c. che rappresenta il numero di palline rosse presenti tra le 3 estratte.

Quesiti

1) Costruire la distribuzione di probabilità della v.c. X.
2) Costruire la funzione di ripartizione F(x) della varabile X.
3) Calcolare F(1,8) e F(2,01).
4) Calcolare la probabilità che 1<X≤3.

Soluzione

1) Nella terna delle palline estratte può essere presente un numero intero di palline rosse cha va da 0 a 3, quindi la variabile casuale X può assumere solo uno dei suddetti valori: $X \in \{0;1;2;3\}$. Calcoliamo la probabilità per ciascuno dei valori indicati.

Calcolo di P(X=0)

Osserviamo che in questo caso le tre palline estratte sono verdi e data la composizione dell'urna si può avere solo una terna di palline verdi. La probabilità richiesta è data dal reciproco del numero $N=C_{7;3}$ di combinazioni semplici della classe 3 che si possono comporre con le 7 palline presenti nell'urna. Quindi

$$P(X=0)=\frac{1}{C_{7;3}}=\frac{1}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{\frac{D_{7;3}}{3!}}=\frac{1}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}}=\frac{1}{35}$$

Calcolo di P(X=1)

In questo caso il numero di terne contenenti una pallina rossa è uguale al prodotto del numero di palline rosse (4) con il numero delle combinazioni semplici di classe 2 che si possono comporre con le tre palline verdi. La probabilità richiesta è dunque il rapporto tra detto numero ed il numero $N=C_{7;3}$ precisato sopra. Si ha:

$$P(X=1)=\frac{4\cdot C_{3;2}}{C_{7;3}}=\frac{4\cdot\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{4\cdot\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}}=\frac{12}{35}$$

Calcolo di P(X=2)

Il numero di terne contenenti 2 palline rosse è uguale al prodotto del numero delle combinazioni semplici di 4 elementi (le palline rosse) della classe 2 per il numero delle palline verdi e quindi la probabilità richiesta è il rapporto tra detto numero e ed il numero $N=C_{7;3}$. Si ha:

$$P(X=2)=\frac{3\cdot C_{4;2}}{C_{7;3}}=\frac{3\cdot\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{3\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}}=\frac{18}{35}$$

Calcolo di P(X=3)

In questo caso il numero delle terne contenenti 3 palline rosse è uguale al numero di combinazioni semplici di 4 elementi della classe tre e quindi la probabilità richiesta è

$$P(X=3)=\frac{C_{4;3}}{C_{7;3}}=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}}=\frac{4}{35}$$

Distribuzione di probabilità		
X	p_i	$P_{cumulate}$
0	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$
1	$\frac{12}{35}$	$\frac{13}{35}$
2	$\frac{18}{35}$	$\frac{31}{35}$
3	$\frac{4}{35}$	$\frac{35}{35}$

2) Ricordiamo che la funzione di ripartizione F(x) è definita su tutto l'asse reale e $\forall x \in R$ risulta $F(x)=P(X\le x)$. Ciò premesso, per la costruzione della funzione di ripartizione della v.c. in oggetto è opportuno predisporre il calcolo delle probabilità cumulate; i dati sono riportati nella terza colonna della tabella riportata a lato. La funzione di ripartizione è così definita:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & per \quad x<0 \\ \frac{1}{35} & per \quad 0\le x<1 \\ \frac{13}{35} & per \quad 1\le x<2 \\ \frac{31}{35} & per \quad 2\le x<3 \\ 1 & per \quad x\ge 3 \end{cases}$$

3) Dalla definizione della funzione di ripartizione deduciamo che

$$F(1{,}8)=\frac{13}{35};\quad F(2{,}01)=\frac{31}{35}.$$

4) Osserviamo che $P(1<X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$.

Lo stesso valore può essere ottenuto utilizzando la funzione di ripartizione

$$P(1<X\le 3)=F(3)-F(1)=1-\frac{13}{35}=\frac{22}{35}$$