Lanci con un dado tetraedrico

Problema

Lanciando un dado a forma di tetraedro regolare sia X il numero di volte che si presenta una determinata faccia.

1) Trovare la distribuzione di probabilità della v.c. X nell'ipotesi che si effettuino n=4 lanci.
2) Determinare il valore medio della variabile casuale X.
3) Determinare la varianza della variabile casuale X.

Soluzione

1) Per fissare le idee su una faccia del tetraedro supponiamo di essere interessati all'uscita del numero 3. Evidentemente nei quattro lanci, il numero 3 si può presentare da 0 volte a 4 volte. La variabile casuale X può assumere quindi uno solo dei valori dell'insieme {0;1;2;3;4}.

Sia E l'evento

E="Nel lancio del dado si presenta la faccia con il numero 3".

La probabilità che si verifichi E è $P(E)=\frac{1}{4}$. Ponendo p=1/4 e q=1-p=3/4, ripetendo la prova 4 volte, l'evento E si può verificare un numero di volte da 0 fino a 4 e sussiste la seguente formula:

$$P(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$$, con k $\in$ {0;1;2;3;4}

La v.c. X ha distribuzione bernoulliana.

La distribuzione di probabilità della v.c. X è quella indicata nella tabella riportata a fianco.

X	P_i
0	$\left(\frac{3}{4}\right)^4$
1	$\frac{27}{64}$
2	$\frac{27}{128}$
3	$\frac{3}{64}$
4	$\frac{1}{256}$

I calcoli relativi ai valori delle cinque probabilità sono:

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^4;$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{4-1}=4\cdot\frac{27}{4^4}=\frac{27}{4^3}=\frac{27}{64}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{4-2}=\frac{27}{128}$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{4-3}=\frac{3}{64}$$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^{4-4}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}$$

2) Malore medio M(X). Dalla teoria è noto che il valore medio M(X) della v.c. bernoulliana X che indica il numero delle volte che si verifica l'evento E nelle **n** prove, se **p** è la probabilità che E si verifichi in un prova, risulta **M(X)=np**. Nel nostro caso sarà perciò M(X)=4·1/4=1. Determiniamo, comunque, M(X) applicando la definizione di valore medio di una v.c. discreta di cui si conoscano i valori argomentali x_1, x_2, …,x_n e le rispettive probabilità.

Si ha

$$M(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i p_i=0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+1\cdot\frac{27}{64}+2\cdot\frac{27}{128}+3\cdot\frac{3}{64}+4\cdot\frac{1}{256}=\frac{27}{64}+\frac{27}{64}+\frac{9}{64}+\frac{1}{64}=\frac{64}{64}=1$$

3) Per il calcolo della varianza intendiamo utilizzare la nota relazione

$$Var(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2$$

per cui calcoliamo $M\left(X^2\right)$

$$M\left(X^2\right)=0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+1^2\cdot\frac{27}{64}+2^2\cdot\frac{27}{128}+3^2\cdot\frac{3}{64}+4^2\cdot\frac{1}{256}=\frac{27}{64}+\frac{54}{64}+\frac{27}{64}+\frac{4}{64}=\frac{112}{64}=\frac{7}{4}$$

Dunque

$$Var(X)=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$$

Osservazione

Ricordiamo che per una v.c. con distribuzione binomiale la varianza è

$$\sigma^2=Var(X)=npq=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$