Esercitazione con n.10 quesiti estratti dal Test di Ingresso assegnato nell'a.s 2017-18 per l'accesso a Matematica e Fisica presso l'Università del Salento

# Università del Salento
## Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
# Test d'INGRESSO
## Matematica e Fisica
## 2017-2018

**A**

**Q1)** (Conoscenze sui polinomi)

**3.** Quanti sono i polinomi di terzo grado che si annullano in $-1$, $0$ e $1$ e valgono $1$ in $1/2$?

A. ☐ 2
B. ☐ infiniti
C. ☐ 3
D. ☐ 1
E. ☐ nessuno

**Q2)** (Conoscenze sui polinomi)

**7.** Quanti sono i polinomi di secondo grado che hanno radici in $0$ e $1$ e valgono $1$ in $1/2$?

A. ☐ 3
B. ☐ 2
C. ☐ infiniti
D. ☐ 1
E. ☐ nessuno

**Q3)** (Conoscenze sui polinomi di secondo grado)

**9.** Se il polinomio $ax^2 + bx + c$ ha due radici reali distinte, allora il polinomio $\frac{c}{2}x^2 - bx + 2a$

A. ☐ non ha alcuna radice
B. ☐ ha due radici reali coincidenti
C. ☐ non ha radici reali
D. ☐ ha due radici reali distinte
E. ☐ ha una sola radice reale

**Q4)** (Conoscenze sulla Probabilità)

12. È più facile ottenere sei lanciando un dado o ottenere una sola testa lanciando cinque monete?

A. ☐ Le probabilità non si possono confrontare
B. ☐ Una sola testa con cinque monete
C. ☐ Sei con un dado
D. ☐ Non si può decidere
E. ☐ È la stessa probabilità

**Q5)** (Conoscenze sulle proprietà della funzione esponenziale)

14. Se $4^{a+2b} = 25$ e $2^{a-b} = 1$ allora $8^a$ vale

A. ☐ $5^{-3}$
B. ☐ 5
C. ☐ $1/25$
D. ☐ non si può dire nulla, dipende da $a$ e $b$
E. ☐ $1/5$

**Q6)** (Proprietà delle simmetrie nel piano cartesiano)

18. Se il punto di coordinate $(x_0, y_0)$ appartiene alla retta di equazione $x + y - 7 = 0$ allora il punto $(y_0, x_0)$

A. ☐ appartiene alla retta $x = 7$
B. ☐ appartiene alla retta di equazione $x + y + 7 = 0$
C. ☐ appartiene alla retta di equazione $-x - y + 7 = 0$
D. ☐ appartiene alla retta $y = 7$
E. ☐ appartiene alla retta $x - y = 0$

**Q7)** (Conoscenze sulle proprietà del grafico di una funzione polinomiale)

25. Sia $f(x)$ un polinomio di grado 4. Per al massimo quanti valori di $x$ si ha $f(x) = -4$?

A. ☐ nessun valore
B. ☐ 2
C. ☐ 8
D. ☐ infiniti
E. ☐ 4

**Q8)** (Calcolo combinatorio e Probabilità. Composizione di numeri interi.)

29. Qual è la probabilità che scelti a caso tre numeri distinti tra 1 e 10 il loro prodotto sia pari?

A. ☐ $1/3$
B. ☐ $1/2$
C. ☐ 1
D. ☐ $3/4$
E. ☐ $11/12$

**Q9)** (Calcolo combinatorio)

32. Quanti triangoli distinti si possono formare con i vertici di un pentagono regolare?

A. ☐ 5
B. ☐ 20
C. ☐ 10
D. ☐ 30
E. ☐ nessuno

**Q10)** (Figure isoperimetriche)

132. Se il perimetro di un quadrato è uguale alla lunghezza di una circonferenza, allora

A. ☐ il cerchio ha area minore del quadrato
B. ☐ il quadrato ha area maggiore del cerchio
C. ☐ il quadrato ha area minore del cerchio
D. ☐ il cerchio e il quadrato hanno la stessa area
E. ☐ nulla si può dire

# Risoluzione dei 10 quesiti

## Q1) (Conoscenze sui polinomi)

### Risoluzione

Proviamo che **esiste un solo polinomio** avente le proprietà richieste:**risposta D.**

Il generico polinomio in oggetto a coefficienti reali ha la seguente forma algebrica $P(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, dunque dipende da quattro parametri. Nel quesito sono assegnate quattro condizioni cui il polinomio deve soddisfare.

Ricordiamo che se un polinomio P(x) di grado n ammette la radice x=$\alpha$ allora esso è divisibile anche per il binomio (x-$\alpha$) e per il teorema del resto (di Ruffini) di può scrivere nella forma P(x)= (x-$\alpha$)·Q(x),con Q(x) polinomio di grado n-1.

Ciò premesso, tenendo conto che il polinomio in oggetto deve annullarsi per x=-1, x=0, x=1 ed è di terzo grado la sua forma sarà del tipo $P(x)=k\cdot x(x+1)(x-1)$, con k=$a_0$. Imponendo la condizione ulteriore che risulti $P\left(\frac{1}{2}\right)=1$ si determina il valore del parametro k. Dunque

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=1\rightarrow k\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)=1\rightarrow k\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1\rightarrow k=-\frac{8}{3}$$

Il polinomio che ha le proprietà richieste è $P(x)=-\frac{8}{3}\cdot x(x+1)(x-1)$. La **risposta** è **D.**

## Q2) (Conoscenze sui polinomi)

### Risoluzione

Ragionando come nel precedente quesito Q1 si dimostra che esiste un solo polinomio di secondo grado a coefficienti reali avente le proprietà richieste ed è $P(x)=-4x^2+4x$. La **risposta** è **D.**

## Q3) (Conoscenze sui polinomi di secondo grado)

### Risoluzione

Il polinomio a coefficienti reali $P(x)=ax^2+bx+c$ ha due radici reali e distinte se e solo se il suo discriminante è positivo: $\Delta=b^2-4ac>0$. Ciò premesso, poiché per il polinomio $P(x)=\frac{c}{2}x^2-bx+2a$ risulta $\Delta=(-b)^2-4\cdot\frac{c}{2}\cdot 2a=b^2-4ac>0$, il polinomio avrà due radici reali e distinte. La **risposta** è **D.**

## Q4) (Conoscenze sulla Probabilità)

### Risoluzione

Proviamo che la risposta esatta è **C**.

Supponendo di avere un dado regolare a sei facce, contrassegnate con i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, la probabilità che si verifichi l'evento E*=<<nel lancio si presenta la faccia con il 6>> è 1/6.

Supponiamo ora di avere cinque monete regolari, ciascuna avente una testa ed una croce, numerate da 1 a 5. Con i simboli usuali T, per testa, C per croce, l'evento

E=<< Lanciando le cinque monete si ottiene una sola testa>>

si verifica se e solo se il risultato del lancio è uno dei seguenti TCCCC, CTCCC, CCTCC, CCCTC, CCCCT, nelle cui scritture la posizione della T indica il numero d'ordine della moneta che nel lancio si è presentata con testa e le altre monete hanno presentato croce. Così, CTCCC indica il risultato che la seconda moneta si è presentata con testa e le altre quattro con croce.

I cinque eventi

$E_1$=<< Lanciando le cinque monete la prima moneta presenta testa e le altre croce >>,

$E_2$=<< Lanciando le cinque monete la seconda moneta presenta testa e le altre croce >>,

…

$E_5$=<< Lanciando le cinque monete la quinta moneta presenta testa e le altre croce >>,

sono incompatibili e la loro unione è l'evento E=<< Lanciando le cinque monete si ottiene una sola testa>>, pertanto (per il teorema della probabilità totale)

$P(E)= P(E_1)+ P(E_2)+\dots P(E_5)$

Osserviamo che dall'aver supposto regolari le singole monete la probabilità che una di queste presenti testa (T) è 1/2, ed è 1/2 la probabilità che presenti croce (C) . Il risultato TCCCC corrisponde al verificarsi dell'evento $E_1$, composto dal verificarsi contemporaneo dei seguenti eventi elementari e indipendenti:

> la **prima moneta** presenta **testa**, la **seconda moneta** presenta **croce**, la **terza moneta** presenta **croce**, la **quarta moneta** presenta **croce**, la **quinta moneta** presenta **croce,**

ciascuno dei quali ha probabilità 1/2 di verificarsi, quindi $P(E_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

Gli altri eventi $E_2$, $E_3$, $E_4$, $E_5$, hanno evidentemente ciascuno ancora probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ di verificarsi, quindi si ha:

$P(E)= P(E_1)+ P(E_2)+\dots P(E_5)= P(E)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$

Confrontando i valori 5/32 e 1/6, essendo $\frac{5}{32}<\frac{1}{6}$, si deduce che è "più facile" ottenere 6 lanciando un dado che ottenere una sola testa lanciando 5 monete. La **risposta** al quesito è **C.**

**Q5)** (Conoscenze sulle proprietà della funzione esponenziale)

**Risoluzione**

Proviamo che la risposta **esatta** è **B.**

I vincoli imposti per i parametri *a* e *b* indicano che i valori di questi devono soddisfare il sistema di equazioni:

$4^{a+2b}=25$ , $\qquad 2^{a-b}=1$

Dalla seconda equazione si deduce in particolare che deve essere *a*-*b*=0, quindi *a*=*b*, che sostituita nella prima equazione conduce all'uguaglianza $4^{3a}=25$, che può essere elaborata come segue:

$$\left(2^2\right)^{3a}=5^2 \rightarrow \left(2^3\right)^{2a}=5^2 \rightarrow \left(8^a\right)^2=5^2$$

e dall'ultima forma, poiché $8^a>0$, segue che deve risultare $8^a=5$. La **risposta** esatta è **B**.

**Q6)** (Proprietà delle simmetrie nel piano cartesiano)

**Risoluzione**

Proviamo che la risposta esatta è **C**.

Osserviamo che i punti $P(x_0;y_0)$ e $P'(y_0;x_0)$ sono simmetrici rispetto alla retta bisettrice del primo e terzo quadrante, la cui equazione è : y=x; pertanto, se $P(x_0;y_0)$ appartiene alla retta r:x+y-7=0 allora il punto $P'(y_0;x_0)$ appartiene alla retta r' simmetrica della retta r rispetto alla suddetta bisettrice. Poiché la retta r è perpendicolare alla bisettrice y=x ( ciò lo si ricava dal confronto dei coefficienti angolari che sono antireciproci) la sua simmetrica rispetto a detta bisettrice è la stessa retta (questa proprietà sussiste per ogni altra retta perpendicolare alla stessa bisettrice). Tra le alternative proposte la C. è quella esatta perché l'equazione della retta riportata -x-y+7=0 è equivalente all'equazione x+y-7=0. La **risposta** esatta è **C**.

**Q7)** (Conoscenza del teorema fondamentale dell'algebra)

**Risoluzione**

Proviamo che la risposta esatta è **E**.

Consideriamo un polinomio di quarto grado a coefficienti reali, che è una particolare funzione reale di variabile reale definita su tutto l'asse reale: $P(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$.

Con $f(x)=P(x)$, se si considera l'equazione $f(x)=-4$, equivalente all'equazione $f(x)+4=0$, evidentemente $f(x)+4$ è ancora un polinomio dello stesso tipo di $P(x)$, che indichiamo brevemente con $P_2(x)$. Per fornire la risposta al quesito dobbiamo fare riferimento all'equazione $P_2(x)=0$.

Ricordiamo che un polinomio di **grado n** a coefficienti reali **nel campo complesso** ammette un numero di zeri (questi numeri sono le radici dell'equazione associata) pari al grado del polinomio. Gli zeri possono essere tutti reali, oppure tutti complessi non reali, oppure di essi k sono reali, con k intero e 0<k<n, ed n-k sono zeri complessi[(1)]. Si dimostra che se un polinomio a coefficienti reali ammette un zero complesso non

[(1)] Precisiamo altresì che un numero $x_1$, reale o complesso, se è zero del polinomio può avere molteplicità h, $h\in N_0$, maggiore di uno; in questo caso, nell'enumerazione degli zeri del polinomio, il numero $x_1$ va contato h volte relativamente alla totalità n degli zeri (reali o complessi del polinomio).

reale $x_1 = \alpha + i\beta$ ($\alpha$ e $\beta$ sono reali), allora ammette anche come zero il numero complesso coniugato $x_2 = \alpha - i\beta$ e dunque gli eventuali zeri complessi di un polinomio a coefficienti reali sono sempre in numero pari[2].

Tutto ciò premesso, considerata l'equazione $P_2(x)=0$ , le eventuali sue radici reali e distinte rappresentano le ascisse dei punti comuni tra la retta s:y=-4 e il diagramma della funzione y= $f(x)$. L'equazione $P_2(x)=0$, algebrica intera (polinomiale) è di quarto grado e dunque le sue eventuali radici reali possono essere al massimo 4. Per quanto precisato sopra l'equazione potrebbe avere solo radici complesse. Un esempio di tal genere è l'equazione $\left(x^2+x+1\right)^2+4=0$, ottenuta con $P(x)=\left(x^2+x+1\right)^2$ .

Relativamente al numero di radici reali per l'equazione $P_2(x)=0$ i casi che si possono presentare sono i seguenti.

**a)** Tutte le **radici** sono **reali** e distinte, quindi sono 4. In questo caso i valori delle radici $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, sono i punti reali che soddisfano l'equazione $f(x)=-4$. Questa situazione si verifica allorché la retta s:y=-4 è secante il diagramma della funzione y=$f(x)$ in **4 punti distinti** (le cui ascisse è sono i valori delle radici).

**b)** Le quattro **radici** sono tutte **reali**, delle quali due sono semplici ed una ha molteplicità 2. In questo caso **i valori distinti** che soddisfano l'equazione $f(x)=-4$ **sono solo 3**. Questa situazione si verifica allorché la retta s:y=-4 è tangente al diagramma della funzione y=$f(x)$ in un punto ( la cui ascissa è la radice doppia) e secante in altri due distinti punti. Il punto in cui si ha la tangenza è di massimo o di minimo relativo per y=$f(x)$.

**c)** Le **radici** sono tutte **reali**, ma sono solo due numeri distinti, ciascuno con molteplicità 2. In questo caso **i valori distinti** che soddisfano l'equazione $f(x)=-4$ **sono solo 2**. Questa situazione si verifica allorché la retta s:y=-4 è tangente al diagramma della funzione y=$f(x)$ in due diversi punti, e questi sono di massimo o di minimo assoluto per y=$f(x)$.

**d)** Le **radici** sono tutte **reali**, ma sono **solo due numeri distinti**, dei quali uno è semplice è l'altro ha molteplicità 3. In questo caso la retta s:y=-4 è secante il diagramma della funzione y=$f(x)$ in un punto e tangente in un secondo punto (questo punto è di flesso a tangente orizzontale per y=$f(x)$) la cui ascissa è la radice con molteplicità 3.

**e)** Le **radici** sono tutte **reali** e coincidenti, vi è **un solo numero** che va **contato 4 volte**. In questo caso la retta s:y=-4 è tangente il diagramma della funzione y=$f(x)$ nell'unico punto avente ascissa uguale all'unico valore trovato per le radici.

**f)** Le **radici** sono **due reali** e **distinte** e **due complesse**. In questo caso retta s:y=-4 è secante il diagramma della funzione y=$f(x)$ in due punti.

**g)** Le **radici** sono **due reali coincidenti** e **due complesse**. In questo caso retta s:y=-4 è tangente il diagramma della funzione y=$f(x)$ nel punto la cui ascissa coincide con il valore reale delle due radici.

**h)** Le **radici** sono **tutte complesse**. In questo caso retta s:y=-4 non ha alcun punto in comune con il diagramma della funzione y=$f(x)$.

---

[2] Ciò porta a concludere che **ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari ammette almeno uno zero reale** (**teorema fondamentale dell'algebra**).

Concludiamo che il numero massimo di valori reali distinti che possono verificare l'equazione $f(x)$=-4 sono solo 4. Risposta **E**.

**Q8)** (Calcolo combinatorio e Probabilità. Composizione di numeri interi.)

**Risoluzione**

Proviamo che la risposta esatta è **E.**

Si devono scegliere a caso tre dei numeri distinti tra i seguenti dieci numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e il loro prodotto deve essere un numero pari. La proprietà del numero prodotto dei tre numeri scelti si verifica se fra i tre numeri almeno uno è divisibile per 2, quindi se almeno uno dei tre numeri è uno dei seguenti:2, 4, 6, 8, 10.

Consideriamo l'evento

E=<<Scelti a caso tre numeri distinti tra i dieci indicati questi sono tutti dispari>>.

Determineremo la probabilità di E. Ciò fatto, osserviamo che l'evento $\overline{E}$, contrario di E, è il seguente:

$\overline{E}$ = <<Scelti a caso tre numeri distinti tra i dieci indicati di questi almeno uno è pari>>.

Evidentemente occorre determinare la probabilità di $\overline{E}$ per la risoluzione del quesito. Per il teorema sulla probabilità dell'evento contrario sarà $P\left(\overline{E}\right)=1-P\left(E\right)$.

Determiniamo dunque P(E).

I numeri dispari tra i dieci assegnati sono cinque, e sono:1, 3, 5, 7, 9. Ricordato che il prodotto di due o più numeri gode della proprietà commutativa, deduciamo che la totalità dei numeri che si possono formare prendendo a caso tre dei cinque numeri dispari indicati è pari al numero delle **combinazioni semplici di 5 elementi della classe 3**, in simboli $C_{5;3}$, il cui valore è

$$C_{5;3}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=\frac{5\cdot4\cdot3!}{3!\cdot2!}=\frac{20}{2}=10\,.$$

Osserviamo ora che la quantità di raggruppamenti che si possono ottenere prendendo a caso tre distinti numeri tra i dieci disponibili 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 è pari al numero delle **combinazioni semplici di 10 elementi della classe 3** che è

$$C_{10;3}=\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\cdot7!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7!}{3!\cdot7!}=\frac{10\cdot9\cdot8}{3!}=120$$

Ebbene, la probabilità dell'evento E è il rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili (concezione classica della probabilità di un evento aleatorio):

$$P\left(E\right)=\frac{C_{5;3}}{C_{10;3}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}\,.$$

In conclusione risulta

$$P\left(\overline{E}\right)=1-P\left(E\right)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

La **risposta** esatta è **E**.

**Q9)** (Calcolo combinatorio)

**Risoluzione**

Proviamo che la risposta esatta è **C.**

Un pentagono regolare è un poligono convesso i cui vertici godono della proprietà che "comunque presi tre vertici questi non sono mai allineati". Il numero dee diversi triangoli che si possono formare prendendo tre vertici a caso è pari alle combinazioni semplici di 5 elementi della classe 3, quindi C5;3 il cui valore è:

$$C_{5;3}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=10$$

*Osservazione*- Nel testo del quesito si precisa che il pentagono è "regolare". In realtà questa precisazione è eccessiva, perché il risultato trovato è identico se si considera un qualsiasi pentagono purché i suoi vertici siano tali che presi comunque tre di essi non risultino mai appartenere alla stessa retta. Questa proprietà è richiesta affinché non capiti che una terna di vertici possa dar luogo ad un triangolo che degenera in un segmento.

La **risposta** esatta è **C**.

**Q10)** (Figure isoperimetriche)

**Risoluzione**

Proviamo che la risposta esatta è **C.**

Sia $l$ la misura del lato del quadrato ed $r$ la misura del raggio della circonferenza considerata. Per ipotesi i perimetri del quadrato e della circonferenza considerata hanno la stessa misura, quindi sussiste l'uguaglianza numerica 4 $l=2\pi r$, da cui si ha $l=\frac{\pi r}{2}$.

L'area del quadrato è $S_1=l^2$ e quella del cerchio delimitato dalla circonferenza in oggetto è $S_2=\pi r^2$. Possiamo scrivere:

$$S_1=l^2=\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2=\frac{\pi^2 r^2}{4}=\frac{\pi}{4}\cdot\pi r^2=\frac{\pi}{4}\cdot S_2<S_2\text{, perché }\frac{\pi}{4}\simeq 0,7854<1.$$

La **risposta** esatta è **C**.