

FUNZIONI ARITMETICHE

Salvatore Siciliano

Dipartimento di Matematica “E. De Giorgi”

Università del Salento

salvatore.siciliano@unisalento.it

Maglie, 10 Gennaio 2011

Definizioni ed esempi

Notazioni e convenzioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri interi positivi;

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.

Se m e n sono due numeri interi, scriveremo $m|n$ per intendere che m divide n .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ conveniamo di usare il termine *divisore* di n riferendoci ai soli divisori positivi di n .

Definizioni ed esempi

Notazioni e convenzioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri interi positivi;

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.

Se m e n sono due numeri interi, scriveremo $m|n$ per intendere che m divide n .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ conveniamo di usare il termine *divisore* di n riferendoci ai soli divisori positivi di n .

Definizioni ed esempi

Notazioni e convenzioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri interi positivi;

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.

Se m e n sono due numeri interi, scriveremo $m|n$ per intendere che m divide n .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ conveniamo di usare il termine *divisore* di n riferendoci ai soli divisori positivi di n .

Definizioni ed esempi

Notazioni e convenzioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri interi positivi;

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.

Se m e n sono due numeri interi, scriveremo $m|n$ per intendere che m divide n .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ conveniamo di usare il termine *divisore* di n riferendoci ai soli divisori positivi di n .

Definizioni ed esempi

Notazioni e convenzioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri interi positivi;

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.

Se m e n sono due numeri interi, scriveremo $m|n$ per intendere che m divide n .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ conveniamo di usare il termine *divisore* di n riferendoci ai soli divisori positivi di n .

Definizioni ed esempi

Notazioni e convenzioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri interi positivi;

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.

Se m e n sono due numeri interi, scriveremo $m|n$ per intendere che m divide n .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ conveniamo di usare il termine *divisore* di n riferendoci ai soli divisori positivi di n .

Definizioni ed esempi

Notazioni e convenzioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri interi positivi;

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.

Se m e n sono due numeri interi, scriveremo $m|n$ per intendere che m divide n .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ conveniamo di usare il termine *divisore* di n riferendoci ai soli divisori positivi di n .

Definizioni ed esempi

Notazioni e convenzioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri interi positivi;

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.

Se m e n sono due numeri interi, scriveremo $m|n$ per intendere che m divide n .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ conveniamo di usare il termine *divisore* di n riferendoci ai soli divisori positivi di n .

Una *funzione aritmetica* è una funzione definita su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{C}$.

Una funzione aritmetica f si dice *moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{mcd}(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n).$$

Una funzione aritmetica f si dice *completamente moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Una *funzione aritmetica* è una funzione definita su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{C}$.

Una funzione aritmetica f si dice *moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{mcd}(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n).$$

Una funzione aritmetica f si dice *completamente moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Una *funzione aritmetica* è una funzione definita su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{C}$.

Una funzione aritmetica f si dice *moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{mcd}(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n).$$

Una funzione aritmetica f si dice *completamente moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Una *funzione aritmetica* è una funzione definita su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{C}$.

Una funzione aritmetica f si dice *moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{mcd}(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n).$$

Una funzione aritmetica f si dice *completamente moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Una *funzione aritmetica* è una funzione definita su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{C}$.

Una funzione aritmetica f si dice *moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{mcd}(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n).$$

Una funzione aritmetica f si dice *completamente moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Una *funzione aritmetica* è una funzione definita su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{C}$.

Una funzione aritmetica f si dice *moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{mcd}(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n).$$

Una funzione aritmetica f si dice *completamente moltiplicativa* se

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.

Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).

Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

Esempi

- La *funzione di immersione* $\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n$, è ovviamente una funzione aritmetica completamente moltiplicativa.
- Sia $c \in \mathbb{C}$. La *funzione costante* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c$, non è moltiplicativa, a meno che $c = 0$ oppure $c = 1$.
Nel primo caso si avrà la cosiddetta *funzione nulla*, nel secondo la *funzione unità* (nel seguito denotata col simbolo u).
Ovviamente, tali funzioni sono anche completamente moltiplicative.

- La funzione *numero dei divisori* τ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau(n) = |\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

- La funzione *somma dei divisori* σ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Proveremo che la funzione aritmetica σ è moltiplicativa.

- La funzione *numero dei divisori* τ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau(n) = |\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

- La funzione *somma dei divisori* σ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Proveremo che la funzione aritmetica σ è moltiplicativa.

- La funzione *numero dei divisori* τ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau(n) = |\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

- La funzione *somma dei divisori* σ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Proveremo che la funzione aritmetica σ è moltiplicativa.

- La funzione *numero dei divisori* τ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau(n) = |\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

- La funzione *somma dei divisori* σ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Proveremo che la funzione aritmetica σ è moltiplicativa.

- La funzione *numero dei divisori* τ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau(n) = |\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

- La funzione *somma dei divisori* σ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Proveremo che la funzione aritmetica σ è moltiplicativa.

- La funzione *numero dei divisori* τ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau(n) = |\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

- La funzione *somma dei divisori* σ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Proveremo che la funzione aritmetica σ è moltiplicativa.

- La funzione *numero dei divisori* τ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau(n) = |\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

- La funzione *somma dei divisori* σ è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Proveremo che la funzione aritmetica σ è moltiplicativa.

- La *funzione φ di Eulero* è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n, \text{ mcd}(m, n) = 1\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica φ è moltiplicativa.

- La *funzione μ di Möbius* è definita come segue. Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n > 1$ sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Poniamo:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile notare che μ è moltiplicativa, ma non completamente moltiplicativa.

- La *funzione φ di Eulero* è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n, \gcd(m, n) = 1\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica φ è moltiplicativa.

- La *funzione μ di Möbius* è definita come segue. Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n > 1$ sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Poniamo:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile notare che μ è moltiplicativa, ma non completamente moltiplicativa.

- La *funzione φ di Eulero* è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n, \gcd(m, n) = 1\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica φ è moltiplicativa.

- La *funzione μ di Möbius* è definita come segue. Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n > 1$ sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Poniamo:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile notare che μ è moltiplicativa, ma non completamente moltiplicativa.

- La *funzione φ di Eulero* è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n, \gcd(m, n) = 1\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica φ è moltiplicativa.

- La *funzione μ di Möbius* è definita come segue. Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n > 1$ sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Poniamo:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile notare che μ è moltiplicativa, ma non completamente moltiplicativa.

- La *funzione φ di Eulero* è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n, \gcd(m, n) = 1\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica φ è moltiplicativa.

- La *funzione μ di Möbius* è definita come segue. Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n > 1$ sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Poniamo:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile notare che μ è moltiplicativa, ma non completamente moltiplicativa.

- La *funzione φ di Eulero* è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n, \gcd(m, n) = 1\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica φ è moltiplicativa.

- La *funzione μ di Möbius* è definita come segue. Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n > 1$ sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Poniamo:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile notare che μ è moltiplicativa, ma non completamente moltiplicativa.

- La *funzione φ di Eulero* è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n, \gcd(m, n) = 1\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica φ è moltiplicativa.

- La *funzione μ di Möbius* è definita come segue. Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n > 1$ sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Poniamo:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile notare che μ è moltiplicativa, ma non completamente moltiplicativa.

- La *funzione φ di Eulero* è definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n, \gcd(m, n) = 1\}|.$$

Dimostreremo che la funzione aritmetica φ è moltiplicativa.

- La *funzione μ di Möbius* è definita come segue. Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n > 1$ sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Poniamo:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile notare che μ è moltiplicativa, ma non completamente moltiplicativa.

Osservazione

Una funzione aritmetica moltiplicativa f è completamente nota non appena siano noti i valori che essa assume sulle potenze dei numeri primi.

Sia infatti n un intero maggiore di 1 e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Allora si ha

$$f(n) = f(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = f(p_1^{r_1}) f(p_2^{r_2}) \cdots f(p_s^{r_s}).$$

Osservazione

Una funzione aritmetica moltiplicativa f è completamente nota non appena siano noti i valori che essa assume sulle potenze dei numeri primi.

Sia infatti n un intero maggiore di 1 e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Allora si ha

$$f(n) = f(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = f(p_1^{r_1}) f(p_2^{r_2}) \cdots f(p_s^{r_s}).$$

Osservazione

Una funzione aritmetica moltiplicativa f è completamente nota non appena siano noti i valori che essa assume sulle potenze dei numeri primi.

Sia infatti n un intero maggiore di 1 e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Allora si ha

$$f(n) = f(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = f(p_1^{r_1}) f(p_2^{r_2}) \cdots f(p_s^{r_s}).$$

Osservazione

Una funzione aritmetica moltiplicativa f è completamente nota non appena siano noti i valori che essa assume sulle potenze dei numeri primi.

Sia infatti n un intero maggiore di 1 e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Allora si ha

$$f(n) = f(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = f(p_1^{r_1}) f(p_2^{r_2}) \cdots f(p_s^{r_s}).$$

Osservazione

Una funzione aritmetica moltiplicativa f è completamente nota non appena siano noti i valori che essa assume sulle potenze dei numeri primi.

Sia infatti n un intero maggiore di 1 e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la sua decomposizione in fattori primi. Allora si ha

$$f(n) = f(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = f(p_1^{r_1}) f(p_2^{r_2}) \cdots f(p_s^{r_s}).$$

Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$. □

Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$. □

Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$. □

Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$. □

Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$. □

Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$. □

Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$. □

Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$.



Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$.



Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$.



Teorema

Se $f \neq 0$ è una funzione aritmetica moltiplicativa allora $f(1) = 1$.

Dimostrazione

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \neq 0$. Allora abbiamo

$$f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n).$$

Poiché $f(n) \neq 0$ concludiamo che $f(1) = 1$.



Le funzioni aritmetiche φ , τ , σ

Teorema

Sia f una funzione aritmetica moltiplicativa. Allora anche la funzione $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

è moltiplicativa.

Le funzioni aritmetiche φ , τ , σ

Teorema

Sia f una funzione aritmetica moltiplicativa. Allora anche la funzione $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

è moltiplicativa.

Le funzioni aritmetiche φ , τ , σ

Teorema

Sia f una funzione aritmetica moltiplicativa. Allora anche la funzione $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

è moltiplicativa.

Le funzioni aritmetiche φ , τ , σ

Teorema

Sia f una funzione aritmetica moltiplicativa. Allora anche la funzione $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

è moltiplicativa.

Le funzioni aritmetiche φ , τ , σ

Teorema

Sia f una funzione aritmetica moltiplicativa. Allora anche la funzione $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

è moltiplicativa.

Le funzioni aritmetiche φ , τ , σ

Teorema

Sia f una funzione aritmetica moltiplicativa. Allora anche la funzione $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

è moltiplicativa.

Le funzioni aritmetiche φ , τ , σ

Teorema

Sia f una funzione aritmetica moltiplicativa. Allora anche la funzione $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

è moltiplicativa.

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Siano m e n due interi positivi tali che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Notiamo che i divisori di mn sono tutti e soli i numeri naturali della forma $d_m d_n$, con d_m divisore di m e d_n divisore di n . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m d_n) = \sum_{d_m|m} \sum_{d_n|n} f(d_m) f(d_n) \\ &= \sum_{d_m|m} f(d_m) \sum_{d_n|n} f(d_n) = F(m) F(n). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione aritmetica F è moltiplicativa. □

Teorema

Le funzioni aritmetiche τ e σ sono moltiplicative.

Teorema

Le funzioni aritmetiche τ e σ sono moltiplicative.

Teorema

Le funzioni aritmetiche τ e σ sono moltiplicative.

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Dimostrazione

Consideriamo la funzione unità u . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$F(n) = \sum_{d|n} u(d) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n).$$

Poiché u è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica τ è moltiplicativa.

Consideriamo ora la funzione immersione ϵ . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$F(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Poiché ϵ è moltiplicativa, per il teorema precedente anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa. □

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1);$$
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1);$$
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1);$$
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1);$$
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1);$$
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1);$$
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1);$$
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1);$$
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Dimostrazione

Se p è un numero primo e m un intero positivo, si ha

$$\tau(p^m) = m + 1;$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Ora, la funzione aritmetica τ è moltiplicativa, pertanto risulta:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \tau(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1).$$

Inoltre, anche la funzione aritmetica σ è moltiplicativa, cosicché abbiamo

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}) = \prod_{i=1}^s \sigma(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

completando la dimostrazione.

Esempio

Determinare il numero e la somma dei divisori di 17325.

Esempio

Determinare il numero e la somma dei divisori di 17325.

Esempio

Determinare il numero e la somma dei divisori di 17325.

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Effettuiamo la decomposizione in fattori primi:

$$17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pertanto abbiamo

$$\tau(17325) = \tau(3^2) \cdot \tau(5^2) \cdot \tau(7) \cdot \tau(11) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(17325) &= \sigma(3^2) \cdot \sigma(5^2) \cdot \sigma(7) \cdot \sigma(11) \\ &= \left(\frac{3^3 - 1}{3 - 1}\right) \left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) \left(\frac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) \left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right) \\ &= 13 \cdot 31 \cdot 8 \cdot 12 = 38688.\end{aligned}$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Teorema

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e sia $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ la decomposizione in fattori primi di n . Allora risulta

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Dimostrazione

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),\end{aligned}$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),\end{aligned}$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),\end{aligned}$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),\end{aligned}$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),\end{aligned}$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),\end{aligned}$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),\end{aligned}$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),\end{aligned}$$

che era quanto si voleva provare. □

Corollario

La funzione φ di Eulero è moltiplicativa.

Corollario

La funzione φ di Eulero è moltiplicativa.

Corollario

La funzione φ di Eulero è moltiplicativa.

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Dimostrazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $\text{mcd}(m, n) = 1$. Se $m = 1$ o $n = 1$ la relazione $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ è ovvia. Supponiamo allora m e n entrambi maggiori di 1 e siano $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ e $n = p_{s+1}^{r_{s+1}} p_{s+2}^{r_{s+2}} \cdots p_l^{r_l}$ le rispettive decomposizioni in fattori primi. Poiché $\text{mcd}(m, n) = 1$, una decomposizione in fattori primi di mn è data da

$$mn = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} p_{s+1}^{r_{s+1}} \cdots p_l^{r_l}.$$

Per il Teorema precedente segue allora

$$\varphi(mn) = mn \cdot \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(m \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) \left(n \cdot \prod_{i=s+1}^l \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) = \varphi(m)\varphi(n)$$

che era quanto si voleva provare. □

Numeri perfetti

Un numero naturale n si dice *perfetto* se coincide con la somma dei suoi divisori propri (ossia diversi da n stesso).

Nota

Un numero naturale n è perfetto se e solo se $\sigma(n) = 2n$.

Numeri perfetti

Un numero naturale n si dice *perfetto* se coincide con la somma dei suoi divisori propri (ossia diversi da n stesso).

Nota

Un numero naturale n è perfetto se e solo se $\sigma(n) = 2n$.

Numeri perfetti

Un numero naturale n si dice *perfetto* se coincide con la somma dei suoi divisori propri (ossia diversi da n stesso).

Nota

Un numero naturale n è perfetto se e solo se $\sigma(n) = 2n$.

Numeri perfetti

Un numero naturale n si dice *perfetto* se coincide con la somma dei suoi divisori propri (ossia diversi da n stesso).

Nota

Un numero naturale n è perfetto se e solo se $\sigma(n) = 2n$.

Numeri perfetti

Un numero naturale n si dice *perfetto* se coincide con la somma dei suoi divisori propri (ossia diversi da n stesso).

Nota

Un numero naturale n è perfetto se e solo se $\sigma(n) = 2n$.

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Esempi

I seguenti numeri sono perfetti:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Teorema (Euclide)

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $2^{n+1} - 1$ è un numero primo allora $2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto.

Teorema (Euclide)

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $2^{n+1} - 1$ è un numero primo allora $2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto.

Teorema (Euclide)

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $2^{n+1} - 1$ è un numero primo allora $2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto.

Teorema (Euclide)

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $2^{n+1} - 1$ è un numero primo allora $2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto.

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Dimostrazione

Poniamo $p = 2^{n+1} - 1$ e $N = 2^n p$. Per un precedente teorema abbiamo

$$\sigma(N) = (2^{n+1} - 1)(p + 1) = 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) = 2N,$$

pertanto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ è perfetto. □

Teorema (Eulero)

Se N è un numero perfetto pari allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{n+1} - 1$ è un numero primo e $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$.

Teorema (Eulero)

Se N è un numero perfetto pari allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{n+1} - 1$ è un numero primo e $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$.

Teorema (Eulero)

Se N è un numero perfetto pari allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{n+1} - 1$ è un numero primo e $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$.

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Dimostrazione

Siano $b, n \in \mathbb{N}$, b dispari, tali che $N = 2^n b$. Poiché la funzione aritmetica σ è moltiplicativa abbiamo

$$\sigma(N) = \sigma(2^n)\sigma(b) = (2^{n+1} - 1)\sigma(b).$$

Poiché N è perfetto risulta inoltre

$$\sigma(N) = 2N = 2^{n+1}b,$$

così segue

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Chiaramente, in tale relazione la seconda frazione è espressa ai minimi termini, pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che

$$b = (2^{n+1} - 1)c, \quad \sigma(b) = 2^{n+1}c.$$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Ora, se c fosse diverso da 1 allora b avrebbe come divisori almeno 1, b e c , quindi avremmo

$$\sigma(b) \geq b + c + 1 = 2^{n+1}c + 1 > 2^{n+1}c = \sigma(b),$$

una contraddizione. Pertanto risulta necessariamente $c = 1$, cosicch 

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

e

$$\sigma(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}. \quad (1)$$

Infine, se $2^{n+1} - 1$ avesse divisori diversi da 1 e se stesso allora avremmo

$$\sigma(2^{n+1} - 1) > 2^{n+1},$$

contraddicendo la (1).

Pertanto il numero $2^{n+1} - 1$   primo e la dimostrazione   completa. $\square$

Questione

Esistono numeri perfetti dispari?

Questione

Esistono numeri perfetti dispari?

Questione

Esistono numeri perfetti dispari?

Questione

I numeri perfetti sono infiniti?

Un numero primo della forma $2^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è detto *primo di Mersenne*.

Nota

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $2^n - 1$ sia un numero di Mersenne è che n sia un numero primo.

Infatti, se k e h sono due interi maggiori di 1, dalla relazione

$$2^{hk} - 1 = (2^h - 1)(1 + 2^h + 2^{2h} + \dots + 2^{h(k-1)})$$

segue che il numero $2^{hk} - 1$ non è primo.

Questione

I numeri perfetti sono infiniti?

Un numero primo della forma $2^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è detto *primo di Mersenne*.

Nota

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $2^n - 1$ sia un numero di Mersenne è che n sia un numero primo.

Infatti, se k e h sono due interi maggiori di 1, dalla relazione

$$2^{hk} - 1 = (2^h - 1)(1 + 2^h + 2^{2h} + \dots + 2^{h(k-1)})$$

segue che il numero $2^{hk} - 1$ non è primo.

Questione

I numeri perfetti sono infiniti?

Un numero primo della forma $2^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è detto *primo di Mersenne*.

Nota

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $2^n - 1$ sia un numero di Mersenne è che n sia un numero primo.

Infatti, se k e h sono due interi maggiori di 1, dalla relazione

$$2^{hk} - 1 = (2^h - 1)(1 + 2^h + 2^{2h} + \dots + 2^{h(k-1)})$$

segue che il numero $2^{hk} - 1$ non è primo.

Questione

I numeri perfetti sono infiniti?

Un numero primo della forma $2^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è detto *primo di Mersenne*.

Nota

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $2^n - 1$ sia un numero di Mersenne è che n sia un numero primo.

Infatti, se k e h sono due interi maggiori di 1, dalla relazione

$$2^{hk} - 1 = (2^h - 1)(1 + 2^h + 2^{2h} + \dots + 2^{h(k-1)})$$

segue che il numero $2^{hk} - 1$ non è primo.

Questione

I numeri perfetti sono infiniti?

Un numero primo della forma $2^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è detto *primo di Mersenne*.

Nota

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $2^n - 1$ sia un numero di Mersenne è che n sia un numero primo.

Infatti, se k e h sono due interi maggiori di 1, dalla relazione

$$2^{hk} - 1 = (2^h - 1)(1 + 2^h + 2^{2h} + \dots + 2^{h(k-1)})$$

segue che il numero $2^{hk} - 1$ non è primo.

Questione

I numeri perfetti sono infiniti?

Un numero primo della forma $2^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è detto *primo di Mersenne*.

Nota

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $2^n - 1$ sia un numero di Mersenne è che n sia un numero primo.

Infatti, se k e h sono due interi maggiori di 1, dalla relazione

$$2^{hk} - 1 = (2^h - 1)(1 + 2^h + 2^{2h} + \dots + 2^{h(k-1)})$$

segue che il numero $2^{hk} - 1$ non è primo.

Questione

I numeri perfetti sono infiniti?

Un numero primo della forma $2^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è detto *primo di Mersenne*.

Nota

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $2^n - 1$ sia un numero di Mersenne è che n sia un numero primo.

Infatti, se k e h sono due interi maggiori di 1, dalla relazione

$$2^{hk} - 1 = (2^h - 1)(1 + 2^h + 2^{2h} + \dots + 2^{h(k-1)})$$

segue che il numero $2^{hk} - 1$ non è primo.

Questione

I numeri perfetti sono infiniti?

Un numero primo della forma $2^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è detto *primo di Mersenne*.

Nota

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $2^n - 1$ sia un numero di Mersenne è che n sia un numero primo.

Infatti, se k e h sono due interi maggiori di 1, dalla relazione

$$2^{hk} - 1 = (2^h - 1)(1 + 2^h + 2^{2h} + \dots + 2^{h(k-1)})$$

segue che il numero $2^{hk} - 1$ non è primo.

$2^p - 1$ è un primo di Mersenne per $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, \dots$

Al momento sono noti 47 primi di Mersenne; il più grande di essi è $2^{43112609} - 1$.

Tale numero è formato da 12978189 cifre e rappresenta anche il più grande numero primo finora conosciuto!

$2^p - 1$ è un primo di Mersenne per $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, \dots$

Al momento sono noti 47 primi di Mersenne; il più grande di essi è $2^{43112609} - 1$.

Tale numero è formato da 12978189 cifre e rappresenta anche il più grande numero primo finora conosciuto!

$2^p - 1$ è un primo di Mersenne per $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, \dots$

Al momento sono noti 47 primi di Mersenne; il più grande di essi è $2^{43112609} - 1$.

Tale numero è formato da 12978189 cifre e rappresenta anche il più grande numero primo finora conosciuto!

$2^p - 1$ è un primo di Mersenne per $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, \dots$

Al momento sono noti 47 primi di Mersenne; il più grande di essi è $2^{43112609} - 1$.

Tale numero è formato da 12978189 cifre e rappresenta anche il più grande numero primo finora conosciuto!

$2^p - 1$ è un primo di Mersenne per $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, \dots$

Al momento sono noti 47 primi di Mersenne; il più grande di essi è $2^{43112609} - 1$.

Tale numero è formato da 12978189 cifre e rappresenta anche il più grande numero primo finora conosciuto!

Problema 1

Determinare tutti i numeri naturali n verificanti le seguenti proprietà:

- 1) gli unici numeri primi che dividono n sono 2, 3 e 5;
- 2) n ha esattamente 2431 divisori.

Problema 1

Determinare tutti i numeri naturali n verificanti le seguenti proprietà:

- 1) gli unici numeri primi che dividono n sono 2, 3 e 5;
- 2) n ha esattamente 2431 divisori.

Problema 1

Determinare tutti i numeri naturali n verificanti le seguenti proprietà:

- 1) gli unici numeri primi che dividono n sono 2, 3 e 5;
- 2) n ha esattamente 2431 divisori.

Problema 1

Determinare tutti i numeri naturali n verificanti le seguenti proprietà:

- 1) gli unici numeri primi che dividono n sono 2, 3 e 5;
- 2) n ha esattamente 2431 divisori.

Problema 1

Determinare tutti i numeri naturali n verificanti le seguenti proprietà:

- 1) gli unici numeri primi che dividono n sono 2, 3 e 5;
- 2) n ha esattamente 2431 divisori.

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Soluzione

La decomposizione in fattori primi di n è della forma

$$n = 2^a 3^b 5^c$$

con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Abbiamo dunque

$$2431 = \tau(n) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Ma

$$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$$

e quindi i valori di n cercati sono esattamente i seguenti:

$$2^{10}3^{12}5^{16}, \quad 2^{10}3^{16}5^{12}, \quad 2^{12}3^{10}5^{16}, \quad 2^{12}3^{16}5^{12}, \quad 2^{16}3^{10}5^{12}, \quad 2^{16}3^{12}5^{10}.$$

Problema 2

Sia p la funzione aritmetica definita dalla condizione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ è l' n -simo primo. Provare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p(n+1) - p(n) > m$.

Problema 2

Sia p la funzione aritmetica definita dalla condizione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ è l' n -simo primo. Provare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p(n+1) - p(n) > m$.

Problema 2

Sia p la funzione aritmetica definita dalla condizione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ è l' n -simo primo. Provare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p(n+1) - p(n) > m$.

Problema 2

Sia p la funzione aritmetica definita dalla condizione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ è l' n -simo primo. Provare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p(n+1) - p(n) > m$.

Soluzione

È sufficiente osservare che gli m numeri consecutivi

$$(m+1)! + 2, (m+1)! + 3, \dots, (m+1)! + m + 1$$

sono tutti composti.

Soluzione

È sufficiente osservare che gli m numeri consecutivi

$$(m+1)! + 2, (m+1)! + 3, \dots, (m+1)! + m + 1$$

sono tutti composti.

Soluzione

È sufficiente osservare che gli m numeri consecutivi

$$(m+1)! + 2, (m+1)! + 3, \dots, (m+1)! + m + 1$$

sono tutti composti.

Soluzione

È sufficiente osservare che gli m numeri consecutivi

$$(m+1)! + 2, (m+1)! + 3, \dots, (m+1)! + m + 1$$

sono tutti composti.

Soluzione

È sufficiente osservare che gli m numeri consecutivi

$$(m+1)! + 2, (m+1)! + 3, \dots, (m+1)! + m + 1$$

sono tutti composti.

Problema 3

Sia k un intero non negativo e sia σ_k la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Provare che σ_k è moltiplicativa e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ è la decomposizione in fattori primi di n allora risulta

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Problema 3

Sia k un intero non negativo e sia σ_k la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Provare che σ_k è moltiplicativa e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ è la decomposizione in fattori primi di n allora risulta

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Problema 3

Sia k un intero non negativo e sia σ_k la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Provare che σ_k è moltiplicativa e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ è la decomposizione in fattori primi di n allora risulta

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Problema 3

Sia k un intero non negativo e sia σ_k la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Provare che σ_k è moltiplicativa e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ è la decomposizione in fattori primi di n allora risulta

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Problema 3

Sia k un intero non negativo e sia σ_k la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Provare che σ_k è moltiplicativa e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ è la decomposizione in fattori primi di n allora risulta

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Problema 3

Sia k un intero non negativo e sia σ_k la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Provare che σ_k è moltiplicativa e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ è la decomposizione in fattori primi di n allora risulta

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Problema 3

Sia k un intero non negativo e sia σ_k la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Provare che σ_k è moltiplicativa e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ è la decomposizione in fattori primi di n allora risulta

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{\eta_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(\eta_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{\eta_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(\eta_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{\eta_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(\eta_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Soluzione

La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto n^k$, è moltiplicativa. Pertanto anche

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

è moltiplicativa. Ora, se p è un primo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sigma_k(p^m) = 1 + p^k + p^{2k} + \cdots + p^{mk} = \frac{p^{k(m+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

Pertanto abbiamo

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^s \sigma_k(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{k(r_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$

Problema 4

Dimostrare che esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ per cui $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto.

Problema 4

Dimostrare che esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ per cui $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto.

Problema 4

Dimostrare che esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ per cui $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.

Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$,
 $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Soluzione

Per ogni intero positivo k consideriamo il numero $n = 2^{2k+1}$.
Allora risulta

$$\varphi(n) = \varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2k}.$$

Pertanto, per ogni numero naturale della forma $n = 2^{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ è un quadrato perfetto, completando la dimostrazione.

Problema 5

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il simbolo $[x]$ denota la parte intera di x , ossia il massimo numero intero non maggiore di x . Dimostrare che la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$f(n) = [\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$$

è moltiplicativa ma non completamente moltiplicativa.

Problema 5

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il simbolo $[x]$ denota la parte intera di x , ossia il massimo numero intero non maggiore di x . Dimostrare che la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$f(n) = [\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$$

è moltiplicativa ma non completamente moltiplicativa.

Problema 5

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il simbolo $[x]$ denota la parte intera di x , ossia il massimo numero intero non maggiore di x . Dimostrare che la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$f(n) = [\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$$

è moltiplicativa ma non completamente moltiplicativa.

Problema 5

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il simbolo $[x]$ denota la parte intera di x , ossia il massimo numero intero non maggiore di x . Dimostrare che la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$f(n) = [\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$$

è moltiplicativa ma non completamente moltiplicativa.

Problema 5

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il simbolo $[x]$ denota la parte intera di x , ossia il massimo numero intero non maggiore di x . Dimostrare che la funzione aritmetica definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$f(n) = [\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$$

è moltiplicativa ma non completamente moltiplicativa.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .

Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.
Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\sqrt{n}]^2$ è il massimo quadrato perfetto non maggiore di n .
Pertanto $f(n) = 1$ se n è un quadrato perfetto e $f(n) = 0$ altrimenti.

Siano ora $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Se $a = 1$ o $b = 1$, banalmente risulta $f(ab) = f(a)f(b)$.

Supponiamo dunque $a, b > 1$. Se m è un intero maggiore di 1 e $m = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora m è un quadrato perfetto se e solo se gli esponenti r_i sono tutti pari.

Poichè $\text{mcd}(a, b) = 1$ si ha quindi che ab è un quadrato perfetto se e solo se a e b lo sono, da cui segue che $f(ab) = f(a)f(b)$.

Infine, f non è completamente moltiplicativa: infatti, risulta ad esempio $f(4) = 1 \neq 0 = f(2)f(2)$.